现代应用数学丛书

# 网络拓扑学

〔日〕近藤一夫　小野寺力男　著



上海科学技术出版社

统一书号 13119·518

定　价 0.46 元

现代应用数学丛书

# 网絡拓扑学

〔日〕近藤一夫
小野寺力男 著

張　設 譯
陆志刚 校

上海科学技术出版社

## 內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。用网絡为中心讲述一維复形的拓扑理論的应用。全书共分5章，前两章介紹网絡接綫理論，第3章敍述樹和反樹，4、5两章介紹网絡的拓扑分析及其变換。可供数学工作者，电子学工作者参考。

現代应用数学丛书

**网 絡 拓 扑 学**

原书名 回路のトポロジー
原著者 〔日〕近藤一夫 小野寺力男
原出版者 岩波书店，1958
譯 者 張 設
校 者 陆 志 剛

＊

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业许可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

＊

开本 850×1168 1/32 印张 2 18/32 字数 57,000
1963年7月第1版 1963年7月第1次印刷
印数 1-5,300

統一书号：13119・518
定 价：(十四) 0.46 元

# 出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閲者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閲的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

# 现代应用数学丛书

| 书名 | 原作者 | 譯者 |
|---|---|---|
| 代数学* | 弥永昌吉等 | 熊全淹 |
| 几何学* | 矢野健太郎 | 孙澤瀛 |
| 复变函数論* | 功力金二郎 | 刘书琴 |
| 集合·拓扑·測度* | 河田敬义 | 賴英华 |
| 泛函分析* | 吉田耕作 | 程其襄 |
| 广义函数* | 岩村联 | 楊永芳 |
| 常微分方程* | 福原满洲雄 | 張庆芳 |
| 偏微分方程* | 南云道夫 | 錢端壮 |
| 特殊函数* | 小谷正雄等 | 錢端壮 |
| 差分方程* | 福田武雄 | 蔡鴻基 |
| 富里哀变换与拉普拉斯变换* | 河田龙夫 | 錢端壮 |
| 变分法及其应用* | 加藤敏夫 | 周怀生 |
| 李群論* | 岩堀长庆 | 孙澤瀛 |
| 随机过程* | 伊藤清 | 刘璋温 |
| 回轉群与对称群的应用* | 山内恭彦等 | 張质賢 |
| 結晶統計与代数* | 伏見康治 | 孙澤瀛 |
| 偏微分方程的应用 | 犬井鉄郎等 | 楊永芳 |
| 微分方程的近似解法 | 加藤敏夫等 | 王占瀛 |
| 数值計算法* | 森口繁一等 | 闕昌龄 |
| 量子力学中的数学方法* | 朝永振一郎 | 周民强 |
| 工程力学系統* | 近藤一夫等 | 刘亦珩 |
| 非綫性振动論* | 古屋茂 | 吕紹明 |
| 力学系与映射理論* | 岩田义一 | 孙澤瀛 |
| 平面彈性論* | 森口繁一 | 刘亦珩 |
| 有限变位彈性論·变形几何学* | 山本善之 近藤一夫 | 刘亦珩 |
| 塑性論* | 鷲津久一郎 | 刘亦珩 |
| 粘性流体理論* | 谷一郎 | 刘亦珩 |
| 可压縮流体理論* | 河村龙馬 | 刘亦珩 |
| 网絡理論* | 喜安善市等 | 陆志刚 |
| 自动控制理論* | 喜安善市等 | 瞿立林 |
| 网絡拓扑学* | 近藤一夫 | 張毅 |
| 信息論* | 喜安善市等 | 李文清 |
| 推断統計过程論 | 北川敏男 | 刘璋温 |
| 統計分析* | 森口繁一 | 刘璋温 |
| 試驗設計法* | 增山元三郎 | 刘璋温 |
| 群体遺傳学的数学理論* | 木村資生 | 刘祖洞 |
| 博奕論* | 宫澤光一 | 張毓楷 |
| 綫性規划* | 森口繁一等 | 刘源張 |
| 經济理論中的数学方法* | 安井琢磨等 | 談祥柏 |
| 随机过程的应用* | 河田龙夫 | 刘璋温 |
| 計算技术 | 高橋秀俊 | 姚晋 |
| 穿孔卡計算机 | 森口繁一 | 刘源張 |

注：有*者已經出版

# 譯 者 序

近年来，1 維复形的代数拓扑学的理論在各种实用技术問題特別是在电网絡問題上的应用产生了显著的成效。

电网絡的拓扑分析的基本原理大体上有两个要点。首先是 Kirchhoff 定律的拓扑形式的概括。如果把点电源和电路的分枝各看做 0 維和 1 維的单形，把电位、电流等等当做这些单形所附带的系数，那末在一般系数的同調群的概念下，古典的 Kirchhoff 定律无非是一种同調关系。于是解一个电网絡时，可把原来网絡中的某些部分換成同調的或者反同調的假想的元素組合，使网絡的結构簡化，便于計算。其次是用同調和反同調的对偶性来說明不同規律間的邏輯关系。这使許多問題在对偶的考察下得到解决。

除电网絡以外，跟 1 維复形的概念有着明显联系的实际問題还很多，不过电网絡問題无疑是現代拓扑学理論能够全面深入地应用的一个典型的領域，别的問題有些所牽涉的仅仅是比較直观的拓扑学原理，而有些則还不能从現代拓扑学理論找到足够有效的工具。例如桁架的应力分析問題，这里由于单形的系数是向量，相应的代数結构大大地复杂化了。要拓扑学方法在这些問題上取得滿意的成績还有待于拓扑学理論本身的充实和提高。

这本"网絡的拓扑学"就是用电网絡做中心来陈述 1 維复形的拓扑学理論的应用的。抽象的拓扑学理論的这种实际应用无疑将吸引許多人的兴趣。但是，現有的拓扑学理論还沒有充分地被利用，特别是关于高維复形的理論是如此。这当然不是說明这些理論本质上脫离实际。在电磁場和基本粒子場中頻繁出現的那些高維的对偶的代数結构显然不是跟代数拓扑学的概念无关的，在这

些領域中善于运用已有的知識无疑是科学家們应尽的責任。

本书的作者和他們在日本的同行們在所謂网络拓扑学这个研究領域中形成了一个活跃的学派，他們的兴趣側重在同調和反同調的对偶性质的闡发上。本书的編排形式也鮮明地表現了他們的风格。由于反同調理論的重大意义，本书的这个特点是值得肯定的。不过叙述上的过分簡略是不能不叫人遺憾的。第1章关于同調理論的概述很难让一个未掌握拓扑学知識的讀者領会要点。这些基本知識，讀者可以参看江澤涵譯拓扑学(商务，1950)，至于反同調的概念的詳細說明，則可参看新近出版的 P. J. Hilton 和 S. Wylie 的 Homology theory (Cambridge, 1960。有中譯本，《同調論》江澤涵等譯，上海科学技术出版社即将出版)一书。以下各章无論对基本理論或例子的叙述都显得不够詳細，特别是对一些所用到的名詞的定义沒有应有的說明。譯者在一些地方加了注解，并且改正了一些錯字。

此外，对名詞的譯法有一点声明。这里也学 Hilton-Wylie 书里的办法，采用 M. M. Постников 和 В. Г. Болтянский 的建議，把傳統的語头 “co” (共)一概改做 “contra” (反)。因此原书里的コホモロジー(cohomology)，双对鎖(cochain)，双对輪体(cocycle)，补木(cotree)等都譯为反同調，反鏈，反圈，反树等等。根据这些名詞的現有涵义，这样譯法也許是国内的拓扑学家們所許可的。

譯者对拓扑学和电工学都外行，譯得不妥当或者錯誤的地方还希望大家指正。

張 鍈

# 序

拓扑学的誕生都說是因 Königsberg 的桥的問題引起的。原来，东普魯士的首府 Königsberg 市内，有七座桥架在那些夹着島屿的三汊河口附近。关于这七座桥的一笔画經过当时著名的大数学家 L. Euler (1707～1783) 解說以后成了多面体理論。不过象今天这样的系統性的研究实际上还得认为起始于 G. Cantor (1879) 和 H. Poincaré (1895)。最近，受拓扑学的洗礼几乎成了現代数学的特色，尤其是多才的 Poincaré 的組合拓扑学，因为是拓扑学的原动力，越发显得地位很高。現在跑到这个高峰上去穷目千里当然不是沒有意义的事。不过毕竟許多人是沒有必要完全严密地理解而且熟习拓扑学的，所以假如能够充当一座从应用数学通向实用方面的桥梁的話，本书的目的也就算达到一半了。

拓扑学是連續的几何学，是研究在一对一可逆連續变换下不变的图形性质和連續变换本身的学問。把所謂組合拓扑学的基本概念全面地总結起来的有 O. Veblen 的著作[1]，那书就是我們这些从事应用工作的人看起来也是明白易懂的。这里要談的专門是网絡拓扑学。网絡是所謂 1 維复形的一种組合对象，构成网絡的不仅有电工学中的电流网絡，电通网絡，磁通网絡，而且还有流速网絡，振动系統，通信网絡，继电器网絡，自动控制网絡，Markoff 过程，分子結构式等等不胜枚举。电流网絡尤其是拓扑学的好对象，依电气工程家說起来，所謂代数复形的拓扑学无非是把一向称为 Kirchhoff 定律的那个熟悉的概念加以組織推广而成的东西[2]。本书就用这方面的具体叙述当中心，其他的应用还得等以后的研究。

关于网絡的拓扑分析近年来岡田，小野寺，宮崎，Percival 等人从电工学的立場做了不少闡发，我們想稍許組織一下，在这里介紹一部分。

在工程技术上更重視的是所謂网絡构成問題。这是为了某种使用目的而設計具有相应的特定性能的电网絡等等的問題。把网絡的接續关系考慮在內的拓扑构成理論目前受到熱烈注意，尤其是含有理想变压器的电流网絡的构成問題最有兴趣。此外在接点网絡，整流器网絡的构成方面考慮到拓扑性质的研究也屢見成效。不过这些都还是有待今后研究的領域，要在适宜于本丛书的程度上做簡洁的有系統的叙述还有困难。因此这里只强調一下它們的重要性。

按照邏輯順序，第 5 章的网絡变換問題介在构成問題和分析問題中間。关于变換問題最近 Kron 所提倡的分裂法 (diakoptics) 值得注意，本书記載了它的要点。

正文里所用的指标記号本来是 $n$ 維流形論里表示几何对象量的东西，这里沒有說明，讀者不妨当作矩陣表示法看待(参考附录 1)。

我們很遺憾，多年来关心这种問題而且做了許多貢献的岡田幸雄博士沒有参加本书的执笔。此外伊理正夫在許多地方做了重大的协助，我們要向他道謝。

近藤一夫
小野寺力男
1957 年 8 月

# 目 录

# 第 1 章　网絡接續的基本概念

## §1　作为复形的网絡

**网絡**由**枝**和联接枝的节点（包括孤立端和孤立点）构成，在組合拓扑学中前者叫做**1 維单形或胞**（**1 单形**或 **1 胞**），后者叫做 **0 維单形或胞**（**0 单形**或 **0 胞**）。在一般 $n$ 維（$n \geqslant 2$）的情况下，把所謂**凸多面体**（作为有限个 $n$ 維 Euclid 半空間[3]—59 ❶的共通部分的那种有界图形）叫做 ***n* 胞形**或 ***n* 胞**。在 0 維和 1 維的情况下，胞和单形一致。为了避免混淆，以后单形这个名称尽量避免。胞形和由胞形变形而成的曲綫图形沒有区别的必要。

$n$ 单形是 $n$ 胞中最簡单的，它是用直綫联接 $n+1$ 个点所得到的 $n$ 維凸多面体。例如图 1.1 中的四面体是 3 单形，构成它的边界的那四个三角形都是 2 单形，那六条棱都是 1 单形，四个頂点都是 0 单形。

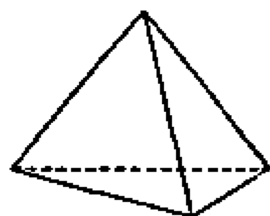


图　1.1

若干个 $n$ 維和較低維的胞形的集合要是有这样的性质：当一个胞形属于这个集合的时候，构成这个胞形的边界的所有的胞形也一定属于这个集合，那末称它为一个 ***n* 維几何复形或胞复形**。特别，当各胞形都是单形的时候叫做**单形复形**。例如正十二面体的表面就是由十二个 2 胞以及构成它們的边界的一共三十个 1 胞还有二十个 0 胞所組成的 2 維胞复形。正二十面体的表面是由二十个 2 单形和三十个 1 单形还有十二个 0 单形組成的 2 維单形复形。

---

❶ 右上角的号碼 [3]—59 表文献 [3] 的第 59 頁。下同。

## §2　代数复形和边界(反边界)

把各个胞形形式地附上系数然后相加得到形式的和。这些和的全体形成一个綫性向量空間,各胞形是它的基底元素。特別,純粹由 $p$ 胞組成的任意綫性組合叫 **$p$ 維代数复形**。記做 $C^p$,有时候記做 $C_p$,各称为 $p$ 維**鏈,反鏈**或**上代数复形,下代数复形**(也叫**代数复形,反代数复形**)。$p$ 維代数复形全体形成一个 Abel 群(加群)。記做 $\boldsymbol{C}^p$ 或 $\boldsymbol{C}_p$,称为 **$p$ 鏈群**或 **$p$ 反鏈群**(**上**或**下代数复形群**)。

特別,如果一个上或下代数复形正好是一个 $p$ 胞,那末記做 $x^p$ 或 $x_p$,

$x_i^p$ 和 $x_j^{p-1}$ 的联接状态用

$$[x_i^p : x_j^{p-1}]$$

$x_{p+1}^k$ 和 $x_p^l$ 的联接状态用

$$[x_{p+1}^k : x_p^l]$$

表示**联接系数**。$x_i^p$ 和 $x_j^{p-1}$($x_{p+1}^k$ 和 $x_p^l$)不联接时,这系数是0,正方向联接时系数是 $+1$,負方向联接时系数是 $-1$(把各胞形取向的一种关联方式規定为正,和它相反的規定为負)。联接系数按号碼 $i$ 和 $j$ 或 $k$ 和 $l$ 記做

$$\eta_j^i(p);\quad [x_i^{p+1} : x_j^p],$$

把它們排成矩陣,叫做**第 $p$ 个联接矩陣**。常有

$$\eta_j^i(p)\eta_k^j(p-1) \equiv \sum_j [x_i^{p+1} : x_j^p][x_j^p : x_k^{p-1}] = 0 \qquad (2.1)$$

这样的**基本关系**。

我們用

$$\sum_j [x^p : x_j^{p-1}] x_j^{p-1} = \partial x^p \quad (+2.2)$$

来定义上 $p$ 胞 $x^p$ 的**边界** $\partial x^p$.

$$\sum_k x_{p+1}^k [x_{p+1}^k : x_p] = \delta x_p \quad (-2.2)$$

来定义下 $p$ 胞 $x_p$ 的**反边界**。

这些 $\partial x^p$ 和 $\delta x_p$ 各是特殊的 $p-1$ 維鏈和 $p+1$ 維反鏈。当边界运算和反边界运算不需要区別时,写做

$Fx^p(=\partial x^p)$. (+2.2.1) | $Fx_p(=\delta x_p)$. (−2.2.1)

对一个 $C^p$(或 $C_p$)中的各基底元素施行运算 $\partial$(或 $\delta$),保持原来的系数,得到一个 $p-1$ 維(或 $p+1$ 維)的代数复形。这叫做 $C^p$(或 $C_p$)的**代数的边界**(或**代数的反边界**)[1],記做

$$\partial C^p,\ FC^p \text{ 或 } \delta C_p,\ FC_p.$$

由(2.1),关于运算 $F$,

$$FF=0:$$

$\partial\partial C^p=0$ (+2.3) | $\delta\delta C_p=0$ (−2.3)

常成立。也就是边界(反边界)的边界(反边界)是0(不存在)。

边界(反边界)等于0的 $p$ 維代数复形一概称做**代数的 $p$ 圈**(**代数的 $p$ 反圈**)[2]。$p$ 边界 $\partial C^{p+1}$($p$ 反边界 $\delta C_{p-1}$)是它的特例。它們全体都构成 $C^p(C_p)$ 的子群,各称为 **$p$ 圈群**(**$p$ 反圈群**),**$p$ 边界群**(**$p$ 反边界群**)。如果各記做

$Z^p,\ F^p,$ | $Z_p,\ F_p,$

那末显然有

$F^p\subseteq Z^p\subseteq C^p$. (+2.4) | $F_p\subseteq Z_p\subseteq C_p$. (−2.4)

代数复形的系数如果取 mod 2 的整数,那末討論的是"不考慮方向的网絡接續",如果取普通的正負整数,那末是"考慮方向的网絡接續",如果取电流电压的数値,那末是"电流电压网絡的接續"。

## §3 整同調和整反同調

系数限于正負整数和零的时候,上述的各个群記做

$C^p_J,\ Z^p_J,\ F^p_J.$ | $C^J_p,\ Z^J_p,\ F^J_p.$

商群[3]

[1] 以下不一定都注明"代数的"。

[2] 以下不一定注明"代数的"。

[3] 参考本丛书弥永,杉浦:《代数学》。

$$H^p_J = Z^p_J / F^p_J \quad (+3.1) \qquad\qquad H^J_p = Z^J_p / F^J_p \quad (-3.1)$$

各称为**第 $p$ 个整同調群**和**第 $p$ 个整反同調群**。它們不仅是拓扑学而且也是网絡接續分析的中心概念。因此有必要熟悉它們的构造。

証明从略，上下整代数复形群 $C^p_J$，$C^J_p$ 各由五种独立元素所构成的基底

$$(a^p_i,\ b^p_i,\ c^p_i,\ d^p_i,\ e^p_i) \qquad\qquad (e^i_p,\ d^i_p,\ c^i_p,\ b^i_p,\ a^i_p)$$

生成的。这基底叫做**正准基底**(或正子基)。其中

$a^p_i$，$b^p_i$，$c^p_i$ 是 $p$ 圈，

$d^p_i$，$e^p_i$ 是非圈的 $p$ 鏈，共 $\omega^p$ 个，

$a^p_i$，$t^p_i b^p_i$ ($t^p_i$ 是整数 $>1$) 是 $p$ 边界，共 $\rho^p$ 个，

$c^p_i$ 是非边界的 $p$ 圈，共 $R^p$ 个。

$d^p_i$ 和 $e^p_i$ 的区别在于

$$a^{p-1}_i = \partial e^p_i,\ t^{p-1}_i b^{p-1}_i = \partial d^p_i. \qquad (+3.2)$$

$e^i_p$，$d^i_p$，$c^i_p$ 是 $p$ 反圈，

$b^i_p$，$a^i_p$ 是非反圈的 $p$ 反鏈，共 $\omega_p$ 个，

$e^i_p$，$t^i_p d^i_p$ ($t^i_p$ 是整数 $>1$) 是 $p$ 反边界，共 $\rho_p$ 个，

$c^i_p$ 是非反边界的反圈，共 $R_p$ 个。

$b^i_p$ 和 $a^i_p$ 的区别在于

$$t^i_{p+1} d^i_{p+1} = \delta b^i_p,\ e^i_{p+1} = \delta a^i_p. \qquad (-3.2)$$

上面的分类可以由第 $p$ 个联接矩陣 $\eta^i_j(p)$ 或第 $p+1$ 个联接矩陣 $\eta^i_j(p+1)$ 的**基本变換**[1]得到[2]。$t^i_p$ 或 $t^p_i$ 各变成它們的大于1的**不变因子**。等于1的不变因子对应于自由度 $a^p_i$ 或 $e^i_p$，$\eta^i_j(p)$ 中无关的独立圈个数是 $R^p(R_p)$。

显然，

---

[1] i) 任意两行(或列)的交換，ii) 一行(或列)的变号，iii) 任意行(或列)乘以共同的(整)数以后加到任意的另外一行(或列)去(参考普通的代数学教科书)。

[2] 詳細証明可以参考沙爱福施雷发著，江澤涵譯，拓扑学，下册，第十二章，商务印书館，1950再版。——譯者注

$$\partial a_i^p = \partial b_i^p = \partial c_i^p = 0, \qquad \omega^p = \rho^{p-1}. \qquad (+3.3)$$

$$\delta e_p^i = \delta d_p^i = \delta c_p^i = 0, \qquad \rho_{p+1} = \omega_p. \qquad (-3.3)$$

特別，

$$\omega^0 (= \rho^{-1}) = 0, \ \rho^n (= \omega^{n+1}) = 0. \qquad (+3.4)$$

$$\omega_n (= \rho_{n+1}) = 0, \ \rho_0 (= \omega_{-1}) = 0. \qquad (-3.4)$$

因此 $p$ 胞($p$ 反胞)的总数 $\alpha^p = \alpha_p$ 是

$$\alpha^p = \rho^p + R^p + \omega^p = \rho^p + \rho^{p-1} + R^p. \qquad (+3.5)$$

$$\alpha_p = \rho_p + R_p + \omega_p = \rho_p + \rho_{p+1} + R_p. \qquad (-3.5)$$

把 (+3.5) 的 $n+1$ 个关系式各乘上 $(-1)^p$ 以后相加，再考慮到 (+3.4)，就得出

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \alpha^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R^p. \qquad (+3.6)$$

这是有名的 **Euler-Poincaré 公式**[3],[4]，$K$ 表示所設的复形，$\chi(K)$ 叫做它的 **Euler-Poincaré 特征数**。

$p$ 胞和 $p+1$ 胞，$p+1$ 反胞和 $p$ 反胞的联接矩陣相等，所以如果考慮到边界运算使維数减少 1，反边界运算使維数增加 1，那末拿它們的阶数和不变因子来看就得到

$$\rho_{p+1} = \rho^p, \ t_{p+1}^i = t_i^p. \qquad (3.7)$$

因此由(±3.5)又得到

$$R^p = R_p. \qquad (3.8)$$

$R^p(R_p)$ 叫**第 $p$ 个整 Betti 数(第 $p$ 个整反 Betti 数)**，$t_i^p(t_p^i)$ 叫**第 $p$ 个撓率数(第 $p$ 个反撓率数)**。由不变因子理論，$t_i^p(t_{p+1}^i)$ 是 $t_{i+1}^p(t_{p+1}^{i+1})$ 的因子[4]-10。这些 $R^p$, $t_i^p$ 是下列各个群的阶数(独立元素的个数)：

由(+3.1)，(+3.2)，对整同調群 $H_J^p$

由(−3.1)，(−3.2)，对整反同調群 $H_p^J$

成立直和分解

$$\boldsymbol{H}_J^p = \boldsymbol{B}_J^p \oplus \boldsymbol{T}_J^p,$$

其中 $\boldsymbol{B}_J^p$ 叫**第 $p$ 个整 Betti 群**，$\boldsymbol{T}_J^p$ 叫**第 $p$ 个整撓率群**，各由同构关系

$$\boldsymbol{B}_J^p \cong \{c_i^p\}, \ \boldsymbol{T}_J^p \cong \{b_i^p\}$$

定义。前者是 $R^p$ 阶的自由群（由 $R^p$ 个独立自由元素生成的加群），后者是 $t_i^p$ 阶的循环群[3]-224, [4]-101 的直和。

$$\boldsymbol{H}_p^J = \boldsymbol{B}_p^J \oplus \boldsymbol{T}_p^J,$$

其中 $\boldsymbol{B}_p^J$ 叫**第 $p$ 个整反 Betti 群**，$\boldsymbol{T}_p^J$ 叫**第 $p$ 个整反撓率群**，各由同构关系

$$\boldsymbol{B}_p^J \cong \{c_p^i\}, \ \boldsymbol{T}_p^J \cong \{d_p^i\}$$

定义。前者是 $R_p$ 阶的自由群，后者是 $t_p^i$ 阶的循环群[3],[4] 的直和。

因为网絡本质上是1維的，如果把它当做1維复形来看，那末1維（最高維）的鏈不会是边界圈，0維（最低維）的鏈不会是反边界圈，所以

$$t_i^1 = 0, \ \ t_0^i = 0,$$

而且因为0維边界圈只有那些相連的枝的两端，所以

$$t_i^0 = t_1^i = 0,$$

也就是撓率数和反撓率数都等于0。因此只要考虑 Betti 群和反 Betti 群就行了（参考下一节）。

由于不相連的两点不能組成0边界，我們知道絕緣的部分（拓扑学中的所謂成分）的个数等于 $c_i^0$。也就是第0个整 Betti 数 $R^0$ 至多等于絕緣的部分的个数。同时 $R^1$ 也就在上面的意义下定义了所謂**独立閉路**的个数。

§1 中提到的2单形或正十二面体、正二十面体等的表面是联接的2維复形，所以 $R^0=1$，而且 $c_i^2$ 只有一个，即它們的整个表面，所以 $R^2=1$，又閉路是2胞的集合的边界，所以 $R^1=0$，因此撓率群是空的。所以 Euler-Poincaré 特征数是

$$\chi(K) \equiv R^2 - R^1 + R^0 = R_2 - R_1 + R_0 = 2. \qquad (\pm 3.9)$$

如果写成 $\alpha^0 = V$，$\alpha^1 = E$，$\alpha^2 = F$，那末

$$V-E+F=2. \qquad (+3.9.1)$$

这就是所謂 **Euler 的多面体公式**,满足这公式的多面体叫 **Euler 多面体**,跟球面**同胚**[3]。

## §4 独立接續❶,节点,枝,閉路(面),閉面(室)

在电工学里,所謂閉路意思是明白的,不过这里我們定义如下。

如果 $z^1=\sum_i x_i^1$ 是 1 維圈,$z^1$ 的任何真子集都不是 1 維圈,那末說 $z^1$ 是**閉路**。同样,如果 $z^2=\sum_i x_i^2$ 是 2 維圈,$z^2$ 的任何真子集都不是 2 維圈,那末叫 $z^2$ 做**閉面**。同样可定义一般的 **$p$ 閉路**。

如果把一个网絡中的一个閉路用面張滿,那末就产生一个以这閉路当边界的 2 維胞。如果一些这样的 2 維胞构成一个閉面,那末又可以造一个用这閉面当边界的 3 維胞。一般,**当 $p\geqslant1$ 的时候,$p$ 維閉路总可以用一个拿它当边界的 $p+1$ 維胞来張滿**[5]~179。从一个复形出发,用这样方式增加維数,造成一个其中所有的 $p$ 維閉路 ($p\geqslant1$) 从而所有的 $p$ 維圈都成为边界的复形时,这个所得到的复形中最高維的边界圈不存在(假如有的話,还可以再提高一維)。至于 0 維,仅仅一点就是一个圈,要考虑以它为边界的 1 維胞是不可能的。

在网絡物理中,把 1 維当做中心而对比 0 維和 2 維的这样一种对偶叙述方式是方便的,所以我們先不把 2 圈(閉面)边界化,而把我們的对象看做 2 維复形,把它的各种要素用表 4.1 所列的名字来称呼❷。

---

❶ 独立接續就是絕緣的部分,也就是成分。作者用到这名詞的时候都沒有下定义。这里先代注明。——譯者注

❷ 这里为了方便只在 1 維的情形下称星形。

表　4.1

| $p$ (維) | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| $p$ 胞 | 点 | 枝 | 面 | |
| 边　　界 | 独立接續里的点对* | 閉　路† | — | 非反圈的反鏈 |
| 非边界的圈 | 一个点,不相連的点对 | — | 閉面(室) | 非反边界的反圈 |
| 非　　閉 | — | (非閉路)星形** | 非閉面†† | 反边界 |

* 和 **, † 和 †† 构成同构的集合(群)。同調群和反同調群都只在 0 維和 2 維的时候有,而且提高到 2 維的过程是象上面所說那样的,所以沒有撓率群和反撓率群❶:

$$\boldsymbol{H}_J^0=\boldsymbol{B}_J^0,\quad \boldsymbol{Z}_J^1=\boldsymbol{F}_J^1,\quad \boldsymbol{H}_J^2=\boldsymbol{B}_J^2;$$
$$\boldsymbol{H}_0^J=\boldsymbol{B}_0^J,\quad \boldsymbol{Z}_1^J=\boldsymbol{F}_1^J,\quad \boldsymbol{H}_2^J=\boldsymbol{B}_2^J;$$
$$R_0=R^0,\quad R_1=R^1=0,\quad R_2=R^2,$$
$$t_J^p=t_p^J=0\quad (p=0,1,2).$$

因此网絡的构造尽在于第 0 和第 2 个整 Betti 群和整反 Betti 群,第一个边界群(≅ 第 2 个反边界群)和反边界群(≅ 第 0 个边界群)的构造。这情形下 Euler-Poincaré 公式指出

$$\alpha^1=(\alpha^0-R^0)+(\alpha^2-R^2).\qquad (+4.1)$$

$$\alpha_1=(\alpha_0-R_0)+(\alpha_2-R_2).\qquad (-4.1)$$

这反映了这样一个事实:在工程上对任何一枝都可以指定独立的性质,因此网絡的独立元素的个数必須由此决定。上面等式的左边的"枝数 $\alpha^1(=\alpha_1)$"是右边的"所謂独立閉路的数目

$$k(=\rho^1=\omega^2)=\alpha^2-R^2$$

(独立的非閉面的数目 $\rho_2=\alpha_2-R_2$)"跟"所謂独立点的数目

$$m(=\rho^0-\omega^1)=\alpha^0-R^0$$

❶ $t_1^J=0$ (1 維时沒有非边界的圈) → $t_J^2=0$, $t_J^0=0$ (在边界圈和部分复形中,0 維圈是仅有的只有一点的鏈——Betti 群的元素) → $t_1^J=0$, $t_J^2=0$(沒有 2 維的边界), $t_0^J=0$ (沒有 0 維反边界)。各个面的張法經过适当选擇可以使 $R_2=R^2=0$, 参考 § 13。

(独立的星形的数目 $\omega_0=\rho_1=\alpha_0-R_0$)”的和。

实际的网絡都是包含在 3 維空間中的，故可考虑以閉面为边界的 3 維胞，因此可以把維数提高到 3，可是更高就不可能了。換句話說，4 維图形是沒有的，所以 3 維圈从而 3 維閉路是沒有的。另一方面，可以把一个独立接續当做一个 $-1$ 維胞看待，按是否包含在它里面而定义联接系数

$$[x^0, x^{-1}].$$

于是从 $-1$ 維起到 3 維止以 1 維为中心可以对称地排列对比。从这观点我們称 3 維胞为**室**。它的对偶是 $-1$ 維胞，称为**独立部分接續**。显然

$$\alpha^{-1}=\rho^{-1},\ R_{-1}=R^{-1}=\omega^{-1}=\rho^{-2}=0,\ R^3=R_3=\omega_3=\rho_4=0,$$

因此 Euler-Poincaré 的关系式变成

$$\alpha^1=(\alpha^2-\alpha^3)+(\alpha^0-\alpha^{-1}), \qquad (+4.1.1)$$

$$k=\alpha^2-\alpha^3,\quad m=\alpha^0-\alpha^{-1}.$$

从这观点来看，0 維胞不一定是圈，2 維胞不一定是反圈。下一节还要从这观点来討論，不过从下一章开始如果沒有特別声明，我們仍旧采取(±4.1)的观点，不考虑 $-1$ 維和 3 維。

把网絡看做 2 維复形也好，看做 3 維的也好，在本书范圍中 (±4.1) 和 (+4.1.1) 是同样的，因此在本质上，結果是相同的。

第 0，第 1，第 2，第 3 个联接矩陣各叫做**絕緣矩陣**，**接續矩陣**，**閉路矩陣**或**面矩陣**，**閉面矩陣**或**室矩陣**。

## §5 指 标 記 号

到現在为止我們都是把組成网絡的元素的那些单形或胞記成 $x_a^0$, $x_\lambda^1$, $x_p^2$ 的形式，不过下面那样的只用指标的表示法也有方便之处[6]。今后两者并用。

表　5.1

| | 枝 | 点 | 閉　路　(面) |
|---|---|---|---|
| 自由标番号 | $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \cdots$<br>$1, 2, \cdots, \alpha^1$<br>(斜　体) | $i, j$<br>$1, 2, \cdots, \mathrm{m}+\mathrm{R}^0$<br>(正　体)<br>$m(=\alpha^0-R^0)=\alpha^0-\alpha^{-1}$ | $k, l$<br>$\mathrm{m}+1, \mathrm{m}+2, \cdots, \mathrm{m}+\alpha^2$ |

| 独立接續 | 独立閉面(室) | 独　立　点 | 独　立　閉　路 |
|---|---|---|---|
| $\alpha, \beta$<br>$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \cdots, \mathrm{R}^0$<br>(正　体) | $\gamma, \delta$<br>$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \cdots, \alpha^3$ | $a, b, c, d, \cdots$<br>$1, 2, \cdots, \mathrm{m}$<br>(正　体)<br>$m(=\alpha^0-R^0)=\alpha^0-\alpha^{-1}$ | $p, q, r, s, \cdots$<br>$\mathrm{m}+1, \mathrm{m}+2, \cdots, \mathrm{m}+\mathrm{k}$<br>$k=\alpha^2-\alpha^3$ |

在图 ±5.1 中，$\alpha^{-1}(=R^0)=2, \alpha^1=8, \alpha^0=6$.

$$\therefore\ m(=\alpha^0-R^0)=\alpha^0-\alpha^{-1}=6-2=4,\ k=\alpha^2-\alpha^3=6-2=4,$$

$$\alpha^1=k+m=4+4=8.$$

电工学中习用的各种联接矩陣的記号[6]和实例列举如下❶。

## 1.1.a+ 接續矩陣(1 維)

$$D^{i}_{\cdot\varkappa}=D^{\cdot i}_{\varkappa}=D^{i}_{\varkappa};\quad (+5.1)$$

$$D^{i}_{\cdot\varkappa}=\begin{vmatrix} D^1_{\cdot 1} & D^1_{\cdot 2} & \cdots & D^1_{\cdot 8} \\ D^2_{\cdot 1} & D^2_{\cdot 2} & \cdots & D^2_{\cdot 8} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D^6_{\cdot 1} & D^6_{\cdot 2} & \cdots & D^6_{\cdot 8} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \end{vmatrix}\quad (+5.2)$$

## 1.1.a− 閉路矩陣,面矩陣(2 維)

$$R^{\varkappa}_{\cdot k}=R^{\cdot\varkappa}_{k}=R^{\varkappa}_{k};\quad (-5.1)$$

$$R^{\varkappa}_{\cdot k}=\begin{vmatrix} R^1_{\cdot 5} & R^1_{\cdot 6} & \vdots & R^1_{\cdot 10} \\ R^2_{\cdot 5} & R^2_{\cdot 6} & \vdots & R^2_{\cdot 10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R^8_{\cdot 5} & R^8_{\cdot 6} & \vdots & R^8_{\cdot 10} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 \end{vmatrix}\quad (-5.2)$$

❶ 参看附录。实例表示于图 ±5.1。

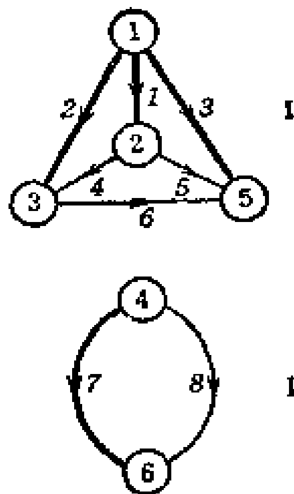


图 +5.1

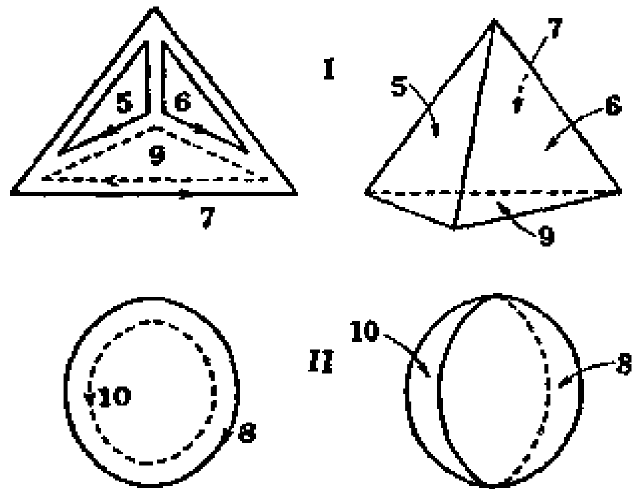


图 −5.1

这里 $D^{i}_{\cdot\varkappa}$ 是对应于場的散度 div 的概念，当枝 $\varkappa$ 是从节点 $i$ 出发时，它取正号。$R^{\varkappa}_{\cdot k}$ 对应于場的旋度。矩陣的元素 0 用点代替。

1.1.b+ **絕緣矩陣** (0 維)

$$d^{\alpha}_{\cdot i}=\begin{vmatrix} d^{\mathrm{I}}_{\cdot 1} & d^{\mathrm{I}}_{\cdot 2} & \cdots & d^{\mathrm{I}}_{\cdot 6} \\ d^{\mathrm{II}}_{\cdot 1} & d^{\mathrm{II}}_{\cdot 2} & \cdots & d^{\mathrm{II}}_{\cdot 6} \end{vmatrix} =\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{vmatrix} \tag{+5.3}$$

1.1.b− **閉面矩陣，室矩陣**(3 維)

$$r^{k}_{\cdot\gamma}=\begin{vmatrix} r^{5}_{\cdot\mathrm{I}} & r^{5}_{\cdot\mathrm{II}} \\ r^{6}_{\cdot\mathrm{I}} & r^{6}_{\cdot\mathrm{II}} \\ \vdots & \vdots \\ r^{10}_{\cdot\mathrm{I}} & r^{10}_{\cdot\mathrm{II}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cdot \\ -1 & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{vmatrix} \tag{−5.3}$$

这些矩陣分别在

| | | | |
|---|---|---|---|
| $D^{i}_{\cdot\varkappa}$: | $\delta i,\ \partial\varkappa$ | $R^{\varkappa}_{\cdot k}$: | $\partial k,\ \delta\varkappa$ |
| $d^{\alpha}_{\cdot i}$: | $\delta\alpha,\ \partial i$ | $r^{k}_{\cdot\varkappa}$: | $\partial r,\ \delta k$ |

等运算中使用。

特别，如果所有的加法都在 mod 2 下进行，那末 $1+1=0$，$1+0=0+1=1$，$0+0=0$，$1\times1=1$，$1\times0=0\times1=0$，$0\times0=0$，偶数都变成 0，奇数都变成 1，所以这些矩陣的元素 ±1 都变成 1，接續的方向就不在考慮之中了。

从这观点来看图 ±5.1，

$\partial \mathbf{I}$ 是室 $\mathbf{I}$ 的边界，即
　面的組合$(\mathbf{5}+\mathbf{6}+\mathbf{7}+\mathbf{9})$，

$\partial \mathbf{5}$ 是面 $\mathbf{5}$ 的边界，即
　枝的組合$(1+2+4)$，

$\partial 1$ 是枝 $1$ 的边界，即
　点的組合$(1+2)$，

$\partial 1$ 是点 1 的边界即
　部分接續 $\mathbf{I}$.

$\partial(\mathbf{5}+\mathbf{6}+\mathbf{7}+\mathbf{9})=0$
表示面的組合 $(\mathbf{5}+\mathbf{6}+\mathbf{7}+\mathbf{9})$ 是
　2 維圈(閉面)。

$\partial(1+2+4)=0$
表示枝的組合$(1+2+4)$是1維
　圈(閉路)。

$\partial(1+2)=0$
表示点的組合$(1+2)$是0維圈，
　是同一个部分接續中的两点
　組成的点对。

$\delta \mathbf{I}$ 是部分接續 $\mathbf{I}$ 的反边界，即
　点的組合$(1+2+3+5)$，

$\delta 1$ 是点 1 的反边界，即
　枝的組合$(1+2+3)$，

$\delta 1$ 是枝 $1$ 的反边界，即
　面的組合$(\mathbf{5}+\mathbf{6})$，

$\delta \mathbf{5}$ 是面 $\mathbf{5}$ 的反边界，即
　室 $\mathbf{I}$.

$\delta(1+2+3+5)=0$
表示点的組 $(1+2+3+5)$ 是 0
　維反圈，从这一組联到其他的
　点的枝不存在。

$\delta(1+2+3)=0$
表示枝的組合 $(1+2+3)$ 是反
　圈，不存在一个面把它們联接
　到別的枝上去(在 mod 2 下)。

$\delta(\mathbf{5}+\mathbf{6})=0$
表示面的組合 $(\mathbf{5}+\mathbf{6})$ 是 2 維反
　圈，不存在一个室把它們联接
　到別的面上去(在 mod 2 下)。

# 第2章　网絡物理量的接續理論

## §6　一般系数的同調群和反同調群

$C^p$, $Z^p$, $F^p$, $C_p$, $Z_p$, $F_p$ 等群都具有拓扑空間[3]-17 的性质，不过在§3,§4内系数是普通的整数或者 mod 2 的整数，因此具有所謂离散拓扑[4]-8，拓扑性质不大需要注意。但在本章，要討論系数是电流，电压，应力(桁架的情况)等等的一般群，所以似乎稍作一些拓扑群論的考虑是必要的。不过这問題在下述两种意义((i) 和 (ii))下化簡了。

首先，$p$ 圈群 $Z^p$(或 $p$ 反圈群 $Z_p$)是——因为可以由准同构对应 $F$ 表示做 $p-1$ 边界群 $F^{p-1}$ (或 $p+1$ 反边界群 $F_{p+1}$)的零元素 0——闭集。因此包含 $F^p(F_p)$ 的包[3]-19 (包含 $F^p$ 或 $F_p$ 的最小的闭集)$\bar{F}^p(\bar{F}_p)$，这是 $Z^p(Z_p)$ 的所謂**拓扑子群**，因此必須用在拓扑群論上有意义的**拓扑商群**

$$H^p = Z^p/\bar{F}^p \quad (+6.1) \qquad\qquad H_p = Z_p/\bar{F}_p \quad (-6.1)$$

来代替 (±3.1) 充当同調群或反同調群。它的构造也是 Betti 群 (反 Betti 群)和撓率群(反撓率群)的和，不过 Betti 数和撓率数等等都随系数集合的代数性质而异。但是可以看到，研究这样的拓扑群的构造时，$\bar{F}^p(\bar{F}_p)$ 和 $F^p(F_p)$ 的不同仅在于撓率群的部分。可是

(i) 一般，当系数成一个体时，$\bar{F}^p = F^p(\bar{F}_p = F_p)$。特别在电网絡物理中所用的系数是电流电压等普通的实数和复数，所以成一个特征数等于 0 的体。这情况下，沒有撓率群(反撓率群)，Betti 数(反 Betti 数)与整 Betti 数(反整 Betti 数)一致。特征数等于 $\varpi$ 的体——任何元素的 $\varpi$ 倍都等于0——的情况下撓率群(反撓率

群)也沒有,Betti 数与在 mod $\pi$ 的整数的情况一致。

(ii) 另一方面,无論假設系数是怎么样的,为了使所謂网絡是1維复形,象§3,§4所指出的那样,整撓率群(整反撓率群)是不出現的,所以对有关的物理量的接續,也沒有必要考虑撓率群。

由于这样的緣故,下面不考虑(±6.1),只根据

$$\boldsymbol{B}^p=\boldsymbol{Z}^p/\boldsymbol{F}^p \quad (+6.2) \qquad \Big| \qquad \boldsymbol{B}_p=\boldsymbol{Z}_p/\boldsymbol{F}_p \quad (-6.2)$$

和

$$\boldsymbol{F}^p\cong\boldsymbol{C}^{p+1}/\boldsymbol{Z}^{p+1} \quad (+6.3) \qquad \Big| \qquad \boldsymbol{F}_p\cong\boldsymbol{C}_{p-1}/\boldsymbol{Z}_{p-1} \quad (-6.3)$$

进行討論。

用物理量当系数的一般代数复形是代表电流接續,电压接續,应力接續等物理量关系的。圈、边界等等也跟整同調,整反同調情形下的几何图形的閉路、边界(或它的整数倍)不同,是代表物理量的連續或不連續結合的。因此有时候相应地用一般的用語比較合适。例如

$p$ 代数复形的差如果属于边界,即

$$C^p-C'^p\in\boldsymbol{F}^p,$$

那末說 $C^p$ 和 $C'^p$ **同調**,写做

$$C^p\simeq C'^p. \qquad (+6.4)$$

特別,如果 $C^p$ 是边界,写做

$$C^p\simeq 0, \qquad (+6.5)$$

則說 $C^p$ “同調于0”。

反 $p$ 代数复形的差如果属于反边界,即

$$C_p-C'_p\in\boldsymbol{F}_p,$$

那末說 $C_p$ 和 $C'_p$ **反同調**,写做

$$C_p\eqsim C'_p. \qquad (-6.4)$$

特別,如果 $C_p$ 是反边界,写做

$$C_p\eqsim 0, \qquad (-6.5)$$

則說 $C_p$“反同調于0”。

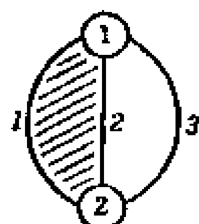


图 6.1

系数是 mod 2 整数的情况当然只是几何学的接續条件的最簡单的要求,而不是物理問題,不过为了說明起見,我們下面用它当例子。图6.1表示在画有斜綫的部分張了一个面的2維复形,这里面

1維圈 $(1+2)$—图 6.1 左半斜綫部分的边界——同調于 0:

$$1+2\simeq 0,$$

$$\therefore\quad (1+3)+(2+3)\simeq 0,$$

$$\therefore\quad 1+3\simeq 2+3,$$

即圈 $1+3$ 同調于圈 $2+3$.

1維反圈 $(1+2+3)$—1 的反边界——反同調于 0:

$$1+2+3\approx 0,$$

$$\therefore\quad (1+2)+3\approx 0,$$

$$\therefore\quad 1+2\approx 3,$$

即反圈 $1+2$ 反同調于反圈 $3$.

最后，对那些与网絡有关的物理量的連續条件的要求是把各种維数的代数复形或反代数复形与它們的边界或反边界联系起来的关系式

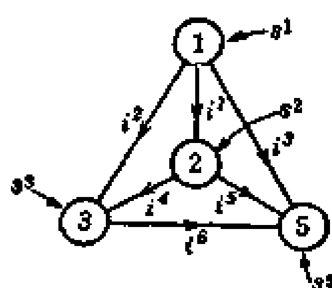
$$C^{p-1}=FC^p,\quad (+6.6)$$

$$C_{p+1}=FC_p,\quad (-6.6)$$

所以这方面的理論显然包含在同調論和反同調論里面。(±6.6)是它的基本方程[6],[8],[9]。

## §7 电流电压网絡的基本公式

作为典型，先拿电流网絡来看，我們得到通常所說的 **Kirchhoff 定律**。事实上，象 §4 末尾那样把网絡看做 3 維复形然后对比两种对偶的情况，就得到如下的結果。在下面各个例子中网絡都根据图 ±7.1.



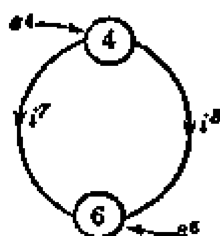




图 +7.1

**Kirchhoff 第 0 定律(0-Kh)** 就是节点电源 $s^i$ 的連續条件

$p=0$,

$C^0=s^ix_i^0$,

$\partial C^0=0$:

$$d^{\alpha}_{\cdot i}s^i=0,\quad (+7.1)$$

$C^0\simeq 0$.

**Kirchhoff 第 3 定律(3-Kh)** 即閉路电动势 $e_l$ 的連續条件

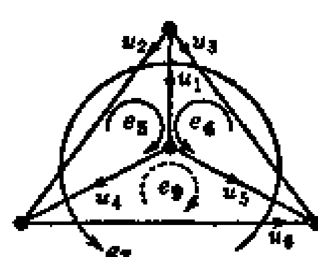
$p=2$,

$C_2=e_lx_2^l$,

$\delta C_2=0$:

$$r_\delta^{\cdot l}e_l=0,\quad (-7.1)$$

$C_2\approx 0$.



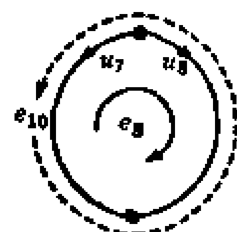




图 −7.1

这里 $d^{\alpha}{}_{i}$ 是絕緣矩陣，$r_{l}^{i}$ 是閉面矩陣。在图 ±7.1 的例子中，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix} = 0.$$

**Kirchhoff 第1定律 (1–Kh)**

就是关于枝元素中經过的电流 $i^{\varkappa}$ 和节点电流源 $s^{i}$ 的連續或平衡条件

$p=1,\ C^1 = i^{\varkappa} x^1_{\varkappa},$

$\partial C^1 = C^0:\ D^{i}{}_{\varkappa} i^{\varkappa} = s^{i}.$ (+7.2)

**Kirchhoff 第2定律 (2–Kh)**

就是关于枝元素的电位差 $u_{\lambda}$ 和閉路电动势 $e_{l}$ 的連續或平衡条件

$p=1,\ C_1 = u_{\lambda} x^{\lambda}_1,$

$\delta C_1 = C_2:\ R_{l}{}^{\lambda} u_{\lambda} = e_{l}.$ (−7.2)

这里 $D^{i}{}_{\varkappa}$ 是接續矩陣，$R_{l}{}^{\lambda}$ 是閉路矩陣。在图 ±7.1 的例子中，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \\ i^5 \\ i^6 \\ i^7 \\ i^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \\ s^6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix}.$$

以上把电流接續当做上代数复形，把电压接續当做下代数复

形处理，从而得到完全的对偶性。

表 7.1

| 場 | 上代数复形 | 电流分布 | 电压分布 | 下代数复形 | 場 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $C^0=s^i x_i^0$ | $s^i$：节点电流源 | $V_j$：节点电位 | $C_0=V_j x_0^j$ | |
| $\boldsymbol{i}$ | $C^1=i^\kappa x_\kappa^1$ | $i^\kappa$：枝电流 | $u_\lambda$：枝电位差 | $C_1=u_\lambda x_1^\lambda$ | $\boldsymbol{E}$ |
| | $C^2=J^k x_k^2$ | $J^k$：閉路电流 | $e_l$：閉路电压源 | $C_2=e_l x_2^l$ | $\dot{\Phi}$ |

注意 $J^k$, $V_j$ 参考下一节。

还可以把这些看做連續的电流和电場的分布条件在网絡的离散的場上的投影，Maxwell 电磁場理論的

发散条件

$$\operatorname{div}\boldsymbol{i}=s^{+❶} \quad (+7.3)$$

通过对应关系

$$\operatorname{div}\to\partial\to D^{i}_{\cdot\kappa}$$

旋轉条件

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}^{-❶} \quad (-7.3)$$

通过对应关系

$$\operatorname{rot}\to\delta\to R_l^{\cdot\lambda}$$

得到相应的表达，这是为什么用 $D$ 和 $R$ 来表示接綫矩陣和閉路矩陣的主要理由。在电流源和它的附近把 (+7.3) 积分，那末由 Gauss 定理——节点电流源和它的反边界的关系——就得到 (+7.2)，而把磁通变化 $-(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)/c$ 沿閉路积分——閉路电动势和它的边界的关系——则得到 (−7.2)。假定向量势位是 $\boldsymbol{A}$，那末由 $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 和 Stokes 定理，得到

$$\iint_{C^2} d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\iint_{C^2} d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\partial C^2} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\partial C^2)=\dot{\Phi}(\partial C^2).$$

这里沿边界 $\partial C^2$ 的閉路积分

$$\Phi(\partial C^2)=\oint_{\partial C^2} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}=\iint_{C^2} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}$$

±❶ $\boldsymbol{i}$ 表示电流密度向量，$\boldsymbol{E}$ 表示电場强度，$\boldsymbol{B}$ 表示磁通密度向量。

在电工学中称为这閉路的**互联磁通**。

## §8 桁架的結构力学

考虑电工学以外的例子，我們来看桁架的平衡条件。

桁架是由彈性直綫元素杆件在节点用釘子联結起来所构成的网絡。在各节点 $\sigma_i^0$，外力(向节点的方向作为正方向) $\boldsymbol{g}^i$ 給各元素 $\sigma_\kappa^1$ 以推力 $\boldsymbol{t}^\kappa$ (以压縮为正)。它的应力是向量，所以有三个分量，但是它的方向和各杆件的方向一致，所以它的自由度仍然是1。如命

$$C^0=\boldsymbol{g}^i\sigma_i^0,\ C^1=\boldsymbol{t}^\kappa\sigma_\kappa^1,$$

那末应力和外力的平衡条件可以写成和 1-Kh 定律相当的形式

$$C^0=\partial C^1,\ \boldsymbol{g}^i=D^i{}_{\cdot\kappa}\boldsymbol{t}^\kappa. \tag{8.1}$$

这表示 $C^0$ 是边界($C^0\simeq 0$)，从而

$$\partial C^0=0. \tag{8.2}$$

(8.2)就是作用在静止的桁架上的外力的平衡条件。

如果用关于任意点的力矩 $\boldsymbol{r}^i\times\boldsymbol{g}^i$ ($\boldsymbol{r}^i$ 是从这一点到节点 $\sigma_i^0$ 的向徑，$\times$是 Gibbs 的向量积記号) 代替 $\boldsymbol{g}^i$ 当系数来考虑0維鏈

$$C'^0=\sum_i \boldsymbol{r}^i\times\boldsymbol{g}^i\sigma_i^0,$$

那末力矩的平衡条件可以写做

$$\partial C'^0=0. \tag{8.3}$$

結果 $C'^0$ 是0維圈。但是如同 (8.2) 和 (8.3) 那样，当談到0維鏈的边界的时候我們考慮的是 $-1$ 維的，所以沒有不是边界的0維圈。因此 $C'^0$ 决定了一个滿足

$$C'^0=\partial C'^1$$

的1維鏈 $C'^1$。

表面上，可以把那些用三个直綫元素当边的三角形定义为2

維单形，把用四个直綫元素当棱的四面体定义为 3 維单形，可是力学量和分量的关系却不能仅仅从組合拓扑学考察。这里不得不进一步考虑直綫元素相互間的仿射几何学的关系和 Euclid 几何学的关系。在这意义下，在結构力学中是不能那么痛快地用 Kirchhoff 定律的两两对偶的形式来对比同調和反同調的。勉强做形式上的模仿，我們把鏈 $C^0$, $C^1$ 在直綫坐标下分解成三个分量分别考虑，然后把力学和 Euclid 几何学的条件对比如下。

表 8.1 里 0-Tr(0-Kh)等是相当于 Kirchhoff 定律的桁架条件，$\boldsymbol{l}_\lambda$ 和 $\boldsymbol{S}_k$ 各是表示枝元素 $\sigma_1^\lambda$(1 維反单形) 和面元素 $\sigma_2^k$ (2 維反单形)的 Euclid 向量，长度各等于枝的长度和三角形的面积，方向各取枝的方向和面的法綫的方向。

表 8.1

| 静 力 学 | Euclid 几 何 学 |
|---|---|
| 0-Tr(0-Kh): $p=0,\ C^0=g^i\sigma_i^0$ $\partial C^0=0: d^\alpha_{\cdot i}g^i=0$ $(C^0\simeq 0)$ | 3-Tr(3-Kh): $p=2,\ C_2=S_k\sigma_2^k$ $\delta c_2=0; r_\delta^{\cdot k}S_k=0$ |
| 1-Tr(1-Kh): $p=1,\ C^1=t^\kappa\sigma_\kappa^1$ $\partial C^1=C^0: D^i_{\cdot\kappa}t^\kappa=g^i$ | 2-Tr(2-Kh): $p=1,\ C_1=l_\lambda\sigma_1^\lambda$ $\delta C_1=0: E_i^{\cdot\lambda}l_\lambda=0$ |

这里值得注意的是，在对偶对应中一边是几何学的图形，另外一边是鏈。根据这样的看法来設計巧妙的应用有 L. Cremona 提議的**单純平面桁架**的实用图解应力分析法[10],[11]~[16]。所謂**单純的桁架**是这样的：至少存在一个只联接两个杆件的节点，并且按适当的順序每从一个节点移动到别的节点的时候，新出現的杆件只有两个。在这情况下杆件应力全部可以由作图决定。图 土8.1 是它的例子，对原来的平面桁架的外力所成的 2 維图形 (图 +8.1) 来

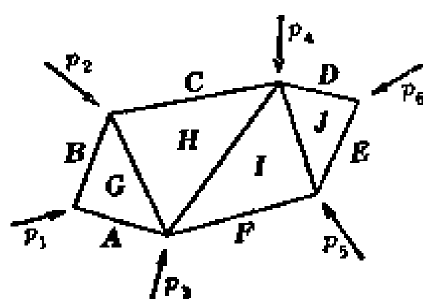



图　+8.1

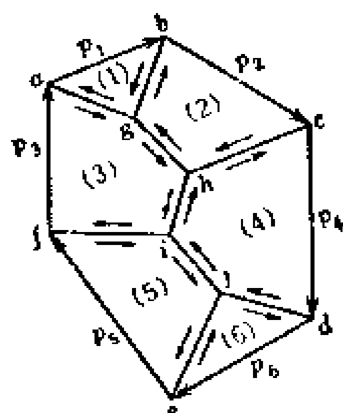



图　−8.1

說，(外力和应力)应力所成的閉力綫图(图−8.1)正好是射影几何学的对偶变换❶。这样的力綫图平面叫做 Cremona **应力平面**。

对不单純的桁架不一定可以用这作图法，不过在静定❷的情况下，可以从一組个数等于节点数或比节点数少三的联立一次方程中解出所有的杆件应力(和反作用力)。

## §9 剩余度

一般，在静止桁架的平衡問題中，当外力 $\boldsymbol{g}^i$ 指定以后，应力 $\boldsymbol{t}^\varkappa$ 不一定就完全决定。这是因为如果

$$\boldsymbol{t}^\varkappa=\underset{1}{\boldsymbol{t}^\varkappa},\ \underset{1}{C^1}=\underset{1}{\boldsymbol{t}^\varkappa}\sigma_\varkappa^1 \tag{9.1}$$

是(8.1)的方程 $C^0=\partial C^1$ 的解，那末加上一个满足齐次平衡方程

$$\partial\underset{0}{C'}=0,\ D^i_{\cdot\varkappa}\underset{0}{\boldsymbol{t}^\varkappa}=0,\ \underset{0}{C'}=\boldsymbol{t}_1^\varkappa\sigma_\varkappa' \tag{9.2}$$

的任意的 $\underset{0}{C^1}$ 以后所得的

$$C^1=\Gamma^1\equiv\underset{0}{C^1}+\underset{1}{C^1},\ \boldsymbol{t}^\varkappa=\underset{0}{\boldsymbol{t}^\varkappa}+\underset{1}{\boldsymbol{t}^\varkappa}$$

也满足同样的非齐次平衡方程。結果可能产生相差一个1維圈的那样一种物理不定性。

---

❶ 参看§21。
❷ 参看下一节。

所給的条件是作为在各节点的分量的平衡条件的

(i) $3\alpha^0$ 个独立的方程，

还有作为桁架整体所受的外力和它的力矩的平衡条件的

(ii) $3R^0$ 个外力方程，和

(iii) $3R^0$ 个力矩方程。

由于(ii)和(iii)，(i)的自由度减小了。因此每杆件各有一个而总共有 $\alpha^1$ 个的未知数 $t^\varkappa$ 里只有

$$N=\alpha^1-3\alpha^0+6R^0 \ (\text{通常 } R^0=1) \qquad (+9.3)$$

个是不定的。这是 3 維桁架的所謂不靜定度。对平面桁架，

$$N=\alpha^1-2\alpha^0+3R^0 \ (\text{通常 } R^0=1) \text{.❶} \qquad (+9.4)$$

在电网絡情况中也有同样的不定性。这情况中所有的施加和响应量都是标量，所以相当于把力矩平衡条件除外的 1 維桁架的不靜定度公式——(+9.3)，(+9.4)的推广——

$$R^1=\alpha^1-\alpha^0+R^0$$

剛好成立。这正好是第 1 个 Betti 数。所以桁架的不靜定度是第 1 个 Betti 数的推广❷。

如果电网絡的不定性从电流分布(1-Kh)和电压分布(2-Kh)两方面来看，把(±7.2)——$\partial C^1=C^0$ 和 $\partial C_1=C_2$——的非齐次解記做

$$i^\varkappa=s^\varkappa,$$

那末加上齐次 1-Kh

$$D^i_{\ \varkappa}I^\varkappa=0 \qquad (+9.5)$$

的任意解 $I^\varkappa$ 后所得的

$$i^\varkappa=s^\varkappa+I^\varkappa \qquad (+9.6)$$

$$u_\lambda=e_\lambda,$$

那末加上齐次 2-Kh

$$R_i^{\ \lambda}U_\lambda=0 \qquad (-9.5)$$

的任意解 $U_\lambda$ 后所得的

$$u_\lambda=e_\lambda+U_\lambda \qquad (-9.3)$$

---

❶ 这样的剩余度如果是負的話，就变成不定的桁架了。

❷ 如果考慮壳的应力場的不定性，那末可以得到第 2 个 Betti 数的推广。把电磁网絡看做面的集合(2 維复形)的一般討論中，也隐含着跟这有关的問題。

也是非齐次 Kirchhoff 方程的解。并且这样的 $I^\varkappa$ 和 $U_\lambda$ 是由任意的 $J^p$, $V_b$ 組成的組合

$$I^\varkappa = R^\varkappa_{\cdot p} J^p. \quad (+9.7) \qquad\qquad U_\lambda = D_\lambda^{\cdot b} V_b. \quad (-9.7)$$

最后，电流分布和电压分布各只在等于独立閉路数 $k=\alpha^2-R^2$ (或 $R^1$) 和独立点数 $m=\alpha^0-R^0$ 的自由度下不定。我們把 $J^p$ 和 $I^\varkappa$ 分别叫做**閉路电流**和**渦旋部分电流**，分别把 $V_b$ 和 $U_\lambda$ 叫做**节点电位**和**星形枝电压降**。

# 第3章 树和反树

## §10 定 义[12],[13]

这一章是当作第一章的补充的。因此系数都取做整数。在一般的拓扑学术語中,"树"是1維的无圈上复形,是$p$維的无圈复形的特殊情况。同样,"反树"是1維无反圈的下复形,是$p$維无反圈复形的特殊情况。

采取§4最后的观点来把网絡扩充到上至3維下至$-1$維的那种做法,事实上就是把0,1,2維的圈統統变为边界,因此

$$R^0=R_0=R^1=R_1=R^2=R_2=0,$$

还有$R^{-1}=R_{-1}=0$(最低維的反鏈中沒有反圈),$R^3=R_3=0$(最高維的鏈中沒有圈)都是明显的。也沒有它的撓率和反撓率。因此不用考虑同調群和反同調群,单考虑边界群和反边界群就行了,正准基底是由

| 边界 | 非圈的鏈 | |
|---|---|---|
| $a^p$ | $e^p$ | $\partial a^p=0,\quad \partial e^{p+1}=a^p$ |
| $e_p$ | $a_p$ | $\delta e_p=0,\quad \delta a_{p-1}=e_p$ |
| 反边界 | 非反圈的反鏈 | |

构成的。

$$V^p_J=\{e^p_i\}$$

和第$p-1$个边界群

$$F^{p-1}_J=\{a^{p-1}_i\}$$

間的同构关系(+3.3)

$$V^p_J\cong F^{p-1}_J,\ \omega^p=\rho^{p-1}$$

和相当于简化了的方程(+3.5)

$$\alpha^p=\rho^p+\rho^{p-1}\qquad(+10.1)$$

$$V^J_p=\{a^i_p\}$$

和第$p+1$个反边界群

$$F^J_{p+1}=\{e^i_{p+1}\}$$

間的同构关系(−3.3)

$$V^J_p\cong F^J_{p+1},\ \omega_p=\rho_{p+1}$$

和相当于简化了的方程(−3.5)

$$\alpha_p=\rho_p+\rho_{p+1}\qquad(-10.1)$$

决定了一切。特别 $\alpha^0=\rho^0+\rho^{-1}$ 成立，因此 $(\alpha^{-1}=)\rho^{-1}=\alpha^0-\rho^0$ 是(相当于§3的 $R^0$) 独立接續的个数。

特别可以取出个数等于0維独立圈 $\{a_i^0\}$ 的数目 $\rho^0$ 那么多的 $\omega^1$ 个 ($e_i^1$ 的个数) 独立的枝来构成 $V_J^1$ 的基底。这样的枝組叫做(**完全**)**树**，再添上一枝就不成树了。

特别，独立2維反圈 $(e_2^i)$ 的数目恰好是 $\rho_2$❶，取出个数与 $\rho_2$ 相等的 $\omega_1$ 个独立枝来可以构成 $V_1^J$ 的基底。这样的枝組叫做(**完全**)**反树**，再添上一枝就不成反树了。

現在来証明去掉树以后剩下的是反树，去掉反树以后剩下的是树。

由(±10.1)中无論那一个可以得到 $\rho_2=\rho^1$ 或者 $\rho_1=\rho^0$，因此

$$\alpha^1=\alpha_1=\rho_2+\rho^0.$$

也就是枝的总数等于独立0維圈数(=树的枝数) $\rho^0$ 与独立1維圈数(=反树的枝数) $\rho_2$ 的和。显然前者生成 $V_J^1$，后者生成 $V_1^J$，它們全体和 $C_J^1$ 也和 $C_1^J$ 同构：

$$C_J^1=V_J^1+Z_J^1\cong V_J^1+V_1^J\cong Z_1^J+V_1^J=C_1^J. \qquad (10.2)$$

于是証明了所說的相补关系[14]。

## §11 独立节点和原始閉路

把反树的枝一一拿出来添到树上，每次可得到一个包含一条閉路的图形。这样一来一共可以有 $k(=\rho_2)$ 条閉路，它們都是独立閉路，叫做**原始閉路**。所謂反树其实就是把原始閉路的間隙縫合起来的枝的組合。对应地如果把各独立节点称为原始星形，那末树正好就是把原始星形联接起来的枝的組合。

树是把独立节点的机能(接續矩陣 $D^\alpha_{.x}$ 中独立的行)轉移到枝上去的工具，反树是把(特别是独立的)原始閉路的机能(閉路矩陣

❶ 一般 $\rho_2\neq B_2$.

$R^{\lambda}_{\cdot q}$ 中独立的列)轉移到枝上去的工具。因此它們在根据枝的物理特性来建立理論时是有用的概念。特別在电工学中，通常假定枝的本身和相互結合都已知，所以利用树和反树的概念来建立公式是方便的。

同构的整系数加群的基底(即取做基底的独立元素)之間的变换是单模变换(行列式的絕对值是 1)。因此逆变换存在,并且变换和逆变换方陣的元素都是整数,从而它們的行列式也必須为整数。可是又必一定互成倒数,所以只能是 +1 或 −1.

任意树的枝，即 $\boldsymbol{V}_J^1$ 的基底和 $\boldsymbol{Z}_1^J$ 的基底(独立星形，从而节点的組合)之間的变换是单模的非奇异变换。使非树和 $m$ 个独立节点同构是做不到的,所以它和 $\boldsymbol{Z}_1^J$ 基底之間的变换是奇异的。因此:

假定独立节点是 1, 2, …, m,那末按 $\varkappa_1\cdots\varkappa_m$ 是不是树,

$$\boldsymbol{D}=m!\,D_{[\varkappa_1\cdots\varkappa_m]}=\pm 1 \text{ 或者 } 0. \tag{+11.1}$$

这里 $\boldsymbol{D}$ 是 $D^{\alpha}_{\cdot\varkappa}$ 的 $m$ 阶子行列式，$D_{\varkappa_1\cdots\varkappa_m}$ 的定义是

$$D^{1}_{\cdot\varkappa_1}D^{2}_{\cdot\varkappa_2}\cdots D^{m}_{\cdot\varkappa_m} \overset{d}{=} D^{1\ 2\ \cdots m}_{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_m} \text{❶} \overset{d}{=} D_{\varkappa_1\varkappa_2\cdots\varkappa_m}. \tag{+11.2}$$

任意反树的枝，即 $\boldsymbol{V}_1^J$ 的基底和原始閉路之間，从而和 $\boldsymbol{Z}_J^1$ 的任意的基底之間的变换是单模的非奇异变换。非反树不能形成 $k$ 个独立閉路，所以和 $\boldsymbol{Z}_J^1$ 的基底之間的变换是奇异的。因此:

假定原始閉路是 $\mathbf{m}+\mathbf{1}$, $\mathbf{m}+\mathbf{2}$, …, $\mathbf{m}+\mathbf{k}\,(=n)$,那末按 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ 是不是反树,

$$\boldsymbol{R}=k!\,R^{[\lambda_1\cdots\lambda_k]}=\pm 1 \text{ 或 } 0. \tag{−11.1}$$

这里 $\boldsymbol{R}$ 是 $R^{\lambda}_{\cdot q}$ 的 $k$ 阶子行列式，$R^{\lambda_1\cdots\lambda_k}$ 的定义是

$$R^{\lambda_1}_{\cdot\,\mathbf{m}+\mathbf{1}}R^{\lambda_2}_{\cdot\,\mathbf{m}+\mathbf{2}}\cdots R^{\lambda_k}_{\cdot\,\mathbf{m}+\mathbf{k}} \overset{d}{=} R^{\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_k}_{\mathbf{m}+\mathbf{1}\,\mathbf{m}+\mathbf{2}\cdots\mathbf{m}+\mathbf{k}} \overset{d}{=} R^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}. \tag{−11.2}$$

---

❶ “$\overset{d}{=}$”表示“定义做”。下同。——譯者注

对于树，$\boldsymbol{D}$ 叫作**树子行列式**，对于非树，$\boldsymbol{D}$ 叫**非树子行列式**。

这些子行列式与把不在某 $m$ 个列中的那些枝除去以后所成的接續的接續方陣的行列式一致。在这操作下，拆散了非树中接續，增加了独立接續，非树子行列式变成 0。

对于反树，$\boldsymbol{R}$ 叫作**反树子行列式**，对于非反树，$\boldsymbol{R}$ 叫作**非反树子行列式**。

这些子行列式与把不在某 $m$ 行中的那些枝都看做一点以后所成的接續的閉路方陣的行列式一致。在这操作下，减小了非反树中独立閉路的数目，非反树子行列式变成 0。

把树（反树）子行列式按适当的行进行 Laplace 展开，可以証明它等于 $\pm1$. 这种适当的行（列）例如可以决定如下。

因为树行列式只是从 $D^{t}_{n}$ 里去掉 $a^{-1}$（§3 的 $R^{0}$）行，所以去掉节点的反边界成为剩下节点的反边界，各枝按其所联接的节点来看，除了一个有联接数 $+1$ 或 $-1$ 以外其余的联接数都是 0. 因此按这个节点的行进行 Laplace 展开，得到 $\pm1\times$（它的余因子）。又对这个余因子也有同样情况，所以重复 $m-1$ 次以后結果成为 $\pm1$.

在上面的証明中，所用的是那些本身是原始閉路的特殊的 1 維圈群基底或 1 維反圈群基底，不过由于同一个整加群的基底变换行列式的絕对值总是 1，結論并不依賴于特殊的基底和特殊的树（反树）。至于正負符号的問題，将在下一节討論。

## §12 树和反树行列式的相对符号

$(\pm11.1)$ 和 $(\pm11.2)$ 对任何树和反树都成立。不但这样，无論基底 $1, \cdots, \mathrm{m}$ $(\mathbf{m+1}, \cdots, \mathbf{n})$ 怎样，它們是不变的，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的相对符号也固定不变，这事实証明如下[15],[16],[17]。

假定整 1 維圈群 $\boldsymbol{Z}^{1}_{J}$ 的基底变换 $\zeta_q \to \zeta_{q'}$ 是

$$\zeta_{q'} = A^{q}_{q'}\zeta_q,\ R^{\lambda}_{q'} = A^{q}_{q'}R^{\lambda}_{q}$$

$$(q = \mathbf{m+1}, \cdots, \mathbf{n}, \quad q' = \mathbf{m'+1'}, \cdots, \mathbf{n'}),$$

那末显然

$$R^{\lambda_1\cdots\cdots\cdots\lambda_k}_{[m'+1'\cdots n']}=A^{q_1\cdots\cdots\cdots q_k}_{[m'+1'\cdots n']}R^{\lambda_1\cdots\lambda_k}_{q_1\cdots q_k}=\det(A^q_{q'})R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}_{[m+1\cdots n]},$$

这里

$$A^{q_1\cdots\cdots q_k}_{m'+1'\cdots n'}=A^{q_1}_{m'+1'}A^{q_2}_{m'+2'}\cdots A^{q_k}_{n'}.$$

因此得到

$$R^{\lambda'_1\cdots\cdots\lambda'_k}_{[m'+1'\cdots n']}/R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}_{[m'+1'\cdots n']}=R^{\lambda'_1\cdots\cdots\lambda'_k}_{[m+1\cdots n]}/R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}_{[m+1\cdots n]}.$$

但是假定 $(\zeta_{m+1},\cdots\zeta_n)$ 是由附属于反树 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ 的原始閉路形成的 $Z^1_f$ 的基底，那末

$$R^{\lambda_i}_q=\begin{cases}1, & q=m+i,\\ 0, & q\neq m+i,\end{cases}$$

所以由(−11.1)和(−11.2)得到

$$k!R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}_{[m+1\cdots n]}=k!R^{[\lambda_1\cdots\lambda_k]}\stackrel{*}{=}1\text{❶},$$

因此

$$R^{\lambda'_1\cdots\cdots\lambda'_k}_{[m+1\cdots n]}/R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}_{[m+1\cdots n]}\stackrel{*}{=}k!R^{\lambda'_1\cdots\cdots\lambda'_k}_{[m+1\cdots n]}.$$

特别当 $\lambda_i=\lambda'_i(i=1,2,\cdots,k-1)$，$\lambda_k\neq\lambda'_k$ 时，这个比值成为

$$k!R^{\lambda'_1\cdots\cdots\lambda'_k}_{[m+1\cdots n]}=k!R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_{k-1}\lambda'_k}_{[m+1\cdots n]}=R^{\lambda'_k}_n.$$

也就是

(i) "如果在构成反树 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ 的补足的那个树上添上枝 $\lambda_k$，并且在由此得到的閉路 $\zeta_n$ 上按正(負)方向配置 $\lambda'_k$，那末 $R^{\lambda'_1\cdots\cdots\lambda'_k}_{[m+1\cdots n]}$ 跟 $R^{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}_{[m+1\cdots n]}$ 的相对符号是 +(−)"。或者說，"如果在双方的反树中把共同的枝 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k-1}$ 各各开放(即除去)，并且使对所产生的閉路，$\lambda_k$ 和 $\lambda'_k$ 有相同(相反)联接方式，那末这符号是 +(−)"。

关于 $D^{[1\cdots m]}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_m}$ 的相对符号，和上面完全对偶的考察也成立。也就是

(i′) "如果在构成树 $\varkappa_1\cdots\varkappa_m$ 的补足的那个反树上添上枝 $\varkappa_m$，对所得到的星形 $\zeta^m$ 按正(負)方向配置 $\varkappa'_m$，那末 $D^{[1\cdots m]}_{\varkappa_1\cdots\varkappa_m}$ 和 $D^{[1\cdots m]}_{\varkappa_1\cdots\varkappa'_m}$ 的相对符号是 +(−)"。或者說"如果在双方的树上各把共同的枝

❶ "$\stackrel{*}{=}$"表示只在所考虑的特殊的基底选擇下相等的意思，下同。——譯者注

$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_{m-1}$ 縮短(即看做一点)，并且使对所形成的接續点，$\varkappa_m$ 和 $\varkappa'_m$ 有相同(相反)的联接方式，那末这相对符号是 $+(-)$”。

就图 +12.1 的例子来說，

如果把树 *123* 和 *124* 的共同枝 *1*, *2* 縮短，那末就成为图 +12.2。枝 *3* 和 *4* 都以正向联接于节点 (1,2)❶，所以

$$3 \mid D_{[123]} / 3 \mid D_{[124]} = 1.$$

如果把反树 *123* 和 *124* 的共同枝开放，那末就成为图 −12.2。枝 *3* 和 *4* 在閉路 *13241* 中以相反方向联接，所以

$$3 \mid R^{[123]} / 3 \mid R^{[124]} = -1.$$

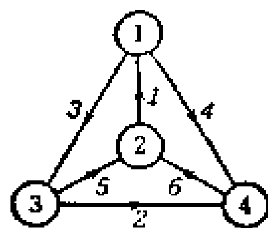


图 +12.1

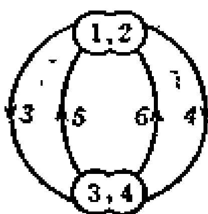


图 +12.2

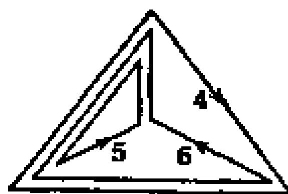


图 −12.1

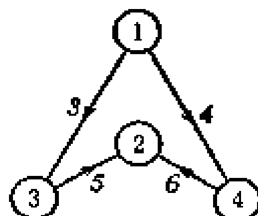


图 −12.2

另一方面，由行列式的性质知道

(ii) “仅仅是枝的顺序不同的(反树)行列式的相对符号隨置换的偶奇而分别是 + 或 −”。

把 (i) 和 (ii) 这两个定理結合起来就可以从图形上看出任意的树(反树)行列式的相对符号。

例如在图 +12.1 的情形，

$$D^{\sigma}_{\cdot\varkappa} = \begin{vmatrix} -1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & 1 & \cdot \end{vmatrix},$$

例如把图 12.1 的閉路取做图 −12.1 的样子，那末

$$R_q^{\cdot\lambda} = \begin{vmatrix} \cdot & -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix},$$

所以

---

❶ 因为都从点 (1, 2) 出发。見 §5 里关于 $D^{i}_{\cdot\varkappa}$ 的正負号的說明。——譯者注

$$3!D_{(123)}=\begin{bmatrix}-1 & \cdot & 1\\ 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1 & -1\end{bmatrix}=1,\quad 3!R^{[123]}=\begin{bmatrix}\cdot & -1 & -1\\ 1 & \cdot & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=-1,$$

❶

$$3!D_{(124)}=\begin{bmatrix}-1 & \cdot & 1\\ 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1 & \cdot\end{bmatrix}=1,\quad 3!R^{[124]}=\begin{bmatrix}\cdot & -1 & 1\\ 1 & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & \cdot\end{bmatrix}=1,$$

相对符号的确和前頁的結果一致。又

$$3!D_{(234)}=\begin{bmatrix}\cdot & -1 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & -1 & \cdot\end{bmatrix}=0\quad 3!R^{[156]}=\begin{bmatrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & \cdot\\ 1 & \cdot & 1\end{bmatrix}=0.$$

是非树[非反树]的例子。相对置換的例子不用举了。

## § 13 部分复形和相对拓扑，部分树和部分反树[18]

把网絡分成两个互相补足的部分来考虑比較方便。于是由网絡扩大而成的 2 維或 3 維复形 $K$ 也可以分成两部分 $K_0$ 和 $K_1$ ——$K=K_0\cup K_1$——，最好是把 $K_1$ 取做閉集合，即滿足

$$\mathrm{Cl}K_1=K_1,$$

从而 $K_0$ 取做开集合，即滿足

$$\mathrm{St}K_0=K_0.$$

这里 $\mathrm{Cl}X$ 是子集 $X(\subset K)$ 与依次作为边界而和它相联的所有低維胞——即 $X$ 的**側面**——的和集，称为 $X$ 的**包**，$\mathrm{St}Y$ 是子集 $Y$ 与依次作为反边界而和它相联的所有高維——即以 $Y$ 为側面的——胞的和集。

在部分上下复形 $K_1$ 和 $K_0$ 上可以定义相对拓扑如下。

首先，任何一个鏈(反鏈) $C$ 都可以分为两个部分 $\underset{0}{C}(\subset K_0)$ 和 $\underset{1}{C}(\subset K_1)$。

---

❶ 原文第一行第三列元素誤为 $-1$。——譯者注

$$C=\underset{0}{C}+\underset{1}{C} \quad (\underset{0}{C}\subset K_0,\ \underset{1}{C}\subset K_1).$$

在各部分 $K_1$ 和 $K_0$ 分别可以考虑如下的**相对边界**和**相对反边界**运算：

$$\partial_1 \underset{1}{C^p} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \partial \underset{1}{C^p} \cap K_1 = \partial \underset{1}{C^p}, \quad \partial_0 \underset{0}{C^p} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \partial \underset{0}{C^p} \cap K_0 \neq \partial \underset{0}{C^p},$$

$$\delta_1 \underset{1}{C_p} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \delta \underset{1}{C_p} \cap K_1 \neq \delta \underset{1}{C_p}, \quad \delta_0 \underset{0}{C_p} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \delta \underset{0}{C_p} \cap K_0 = \delta \underset{0}{C_p},$$

并且可以相应地定义**相对同調**和**相对反同調**。进行如下。

(i) 閉集合 $K_1$ 的鏈 $\underset{1}{C}$ 在 $K_1$ 里有边界，$K_0$ 的圈和边界在 $K$ 里也是圈和边界。但是 $K_0$ 的圈也可能是边界在 $K_1$ 上的 $K$ 的鏈。

(ii) 开集合 $K_0$ 的反鏈 $\underset{0}{C}$ 在 $K_0$ 里有反边界，$K_0$ 的反圈和反边界在 $K$ 里也是反圈和反边界。但是 $K_1$ 的反圈也可能是反边界在 $K_0$ 上的 $K$ 的反鏈。

象 §4 那样扩大到 2 維 (3 維) 网絡中，至少 1 維 ($1\sim2=n-1$) 的部分是无圈并且无反圈的。因此 1 維 ($1\sim2$ 維) 同調群和反同調群是空的。在这情况下，可以

在 $K_1$ 上　根据由 $\partial$ 所定义的同調来定义树和反树，

根据由 $\delta_1$ 所定义的反同調来定义树和反树，又

在 $K_0$ 上　根据由 $\delta$ 所定义的反同調来定义树和反树，

根据由 $\partial_0$ 所定义的同調来定义树和反树，

在这些相对同調和反同調的定义下的**相对树**和**相对反树**彼此等价(参照 §10 的树和反树的等价性)。

此外，如果 $K_1$ 是联接的，那末“**$K_0$ 上的一个树和 $K_1$ 上的一个树的結合一定是 $K$ 上的树**”，“**$K_0$ 上的一个反树和 $K_1$ 上的一个反树的結合一定是 $K$ 上的一个反树**”。因此，$K_0$ 的树虽然是 $K$ 的树的一部分即部分树，但是假定 $K_1$ 的独立节点的数目是 $\alpha-1$，则在 $K_0$ 的树上添上 $K_1$ 的点以后，成为可以分成 $\alpha$ 个分离

部分的东西。不过各部分也可能只包含一点。我們把它叫做**森**或**多树**，有时特别叫做 **$\alpha$ 树**。

同样，$K_1$ 的反树是 $K$ 的反树的一部分，不过 $K_0$ 的独立閉路的数目如果是 $\beta-1$，那末把它叫做 **$\beta$ 反树**，一般就称为**多反树**或**反森**。

特别，2 树和 2 反树各称为**双树**（或林）或**双反树**（或反林）。

凡是有特殊的节点，例如 $a$，$ac$ 等，指定属于一个部分树，又有 $bc$，$bd$ 等指定属于另一个部分树的那些双树的全体記做

$$(tt):\ t_{a,bc},\ t_{ac,bd}\ \text{等等};$$

对偶情况是有特殊閉路指定属于部分反树的那些双反树的全体❶，記做

$$(\overline{tt}):\ \bar{t}^{p,qr},\ \bar{t}^{pr,qs}\ \text{等等}.$$

又从所有的枝中除去 $(tt)$ 那样的双树与联接 $a$ 和 $b$，$a$ 和 $c$ 的枝或联接 $a$ 和 $b$，$c$ 和 $d$ 的枝以后剩余的全体記做

$$(\bar{t}t):\ \bar{t}^{a,bc}\ \text{或}\ \bar{t}^{ac,bd};$$

对偶的情况是从所有的枝中去掉 $(\overline{tt})$ 那样的双反树和联接閉路对 $(p,q)$，$(p,r)$ 或 $(p,q)$，$(r,s)$ 的枝以后剩余的全体，記做

$$(\underline{t}t):\ t_{p,qr}\ \text{或}\ t_{pr,qs}.$$

这些对偶关系可以列成表 13.1，但关于双树的定理和关于双反树的定理并不一一对偶地写下。例如，表 13.1 的下段根据閉路指定所做的定义对非平面网絡沒有意义，又 $\bar{t}^{a,b}(t_{p,q})$ 那样的有指定节点（閉路）的双反树（双树）是不可能定义的，……等等。

表 13·1

双树和双反树的对偶对应

| | 配号 | |
|---|---|---|
| | 双树 | 双反树 |
| 节点指定 | $tt$ ←部分的对偶→ | $\bar{t}t$ |
| | 对偶（交叉对应） | |
| 閉路指定 | $\underline{t}t$ ←部分的对偶→ | $\overline{tt}$ |

❶ 这种根据閉路指定所做的定义，只对平面网絡（和球面同胚的东西）有意义。

# 第4章　网絡的拓扑分析[1]

## §14　因果关系

一直到这里，我們尚未考慮同調的网絡量和反同調的网絡量之間的数量关系，只是对比了它們之間的对偶关系。可是在物理或工程的网絡問題上，它們之間还有数量的关系。其中許多是一对一的，而且通常是綫性的。例如在电网絡上，电流和电压降之間存在因果关系

$i^\varkappa = y^{\varkappa\lambda} u_\lambda$,　(+14.1)　|　$u_\lambda = z_{\lambda\varkappa} i^\varkappa$,　(−14.1)

称为 **Ohm 定律**。$y^{\varkappa\lambda}$ 和 $z_{\lambda\varkappa}$ 是网絡所特有的，前者叫**导納**，后者叫**阻抗**。不限于一定是实数或复数。也不限制关于 $\varkappa$ 和 $\lambda$ 是对称的。不过总是

$y^{\varkappa\lambda} z_{\mu\lambda} = \delta^\varkappa_\lambda$,　(+14.2)[2]　|　$z_{\lambda\mu} y^{\mu\varkappa} = \delta^\varkappa_\lambda$,　(−14.2)[2]

即 $(y^{\varkappa\lambda})$ 和 $(z_{\lambda\varkappa})$ 互成逆方陣。

巳知原因量（在电网絡上是电压源和电流源，在桁架或框架上是外力和力矩等）时求响应量，这过程称为解这个网絡。要解网絡只要把因果关系当作方程来解就行了，不过怎样先把这种关系的表达方式整理得最适当，以便使基本数值可以机械地組織在一起，则有許多讲究。

例如电网絡的因果律的表示方式主要是

（i）把枝看作基本的东西，列出它們之間的 Ohm 定律：(±14.1)。

（ii）把节点（星形）和閉路（面）看作基本的东西，把一切因果

---

[1] 一般事項参考[6]，[13]，[19]。

[2] $\delta^\varkappa_\lambda$ 是 Kronecker 的 $\delta$，因此 $(\delta^\varkappa_\lambda)$ 是单位方陣。

律都化成它們之間的关系：

假定 $s^a$ 是节点电流源，$V_b$ 是节点电位，那末有

(a) $s^a = y^{ab} V_b$,

(b) $V_b = z_{ba} s^a$

假定 $e_q$ 是閉路电压源，$J^p$ 是閉路电流，那末有

(a) $e_q = z_{qp} J^p$,

(b) $J^p = y^{pq} e_q$

这样两种表示方式。不用說，(i) 的关鍵在于抓住树和反树，(ii) 的关鍵在于抓住同調和反同調。此外，第 5 章內所說的

(iii) 通过把閉路变成等价星形，把星形变成等价閉路的这些对偶变换，使复杂的网絡全部或者一部分化成便于分析的等价网絡的方法也是 (ii) 所牵涉到的問題。

电网絡分析中主要是把 (i) 变到 (ii) 的两个步驟：

(a) 已知 $y^{\kappa\lambda}$ 求 $y^{ab}$,

(b) 已知 $y^{\kappa\lambda}$ 求 $z_{ba}$.

(a) 已知 $z_{\lambda\kappa}$ 求 $z_{qp}$,

(b) 已知 $z_{\lambda\kappa}$ 求 $y^{pq}$.

第一个步驟 (a) 是导納变导納，阻抗变阻抗的变換，不过是因果关系的变形罢了，并不是把响应量用原因量表示出来，严格地讲，这不算是解网絡。再进一步計算 $y^{ab}(z_{qp})$ 的逆方陣就成为 (b) 的形式。 在快速計算机已很发达的今天，在枝的特性都用各种数值表示的情况下，后一步驟可以交給机器去完成，因此有人认为分析就可到此为止。但是如果象 § 16 那样要把 (b) 的各阶段一般地处理完毕，那末最好还是把 (a) 称为**中間阶段**，把 (b) 称为**直接**（即**眞的分析**）**阶段**来加以区别。不过后者主要是根据网絡的具体情况来組織逆方陣的計算工作，建立机械的代入运算公式，此外就沒有别的了。

## § 15 中間分析阶段

現在用节点电流源和它的对偶閉路电压源网絡来說明❶。

❶ 对各种原因量和响应量之間的关系都可以同样考虑，可是現在限于本題，只考虑 (±15.7) 內的 $e_\lambda = 0$, $s^\kappa = 0$ 的情况。

(ii) 的 Ohm 定律(a)是

$$D^{a}_{\cdot\varkappa}y^{\varkappa\lambda}D_{\lambda}^{\cdot b}V_{b}=s^{a}\quad(+15.1)$$

如果还有枝电压源 $e_\lambda$，则右边改成

$$s^{a}-D^{a}_{\cdot\varkappa}y^{\varkappa\lambda}e_{\lambda}$$

就行了。

$$R_{q}^{\cdot\lambda}z_{\lambda\varkappa}R^{\varkappa}_{\cdot p}J^{p}=e_{q}.\quad(-15.1)$$

如果还有枝电流源 $s^\varkappa$，则右边改成

$$e_{q}-R_{q}^{\cdot\lambda}z_{\lambda\varkappa}s^{\varkappa}$$

就行了。

(a) 或者 (±15.1) 左边的

$$y^{ab}\overset{\mathrm{d}}{=}D^{a}_{\cdot\varkappa}y^{\varkappa\lambda}D_{\lambda}^{\cdot b}$$

叫**节点导纳**，是这样一些 $y^{\varkappa\lambda}$ 的代数和，它們的前一个指标所代表的枝的全体构成节点 $a$ 的反边界，后一个指标所代表的枝的全体构成节点 $b$ 的反边界。

$$z_{qp}\overset{\mathrm{d}}{=}R_{q}^{\cdot\lambda}z_{\lambda\varkappa}R^{\varkappa}_{\cdot p}$$

叫**閉路阻抗**，是这样一些 $z_{\lambda\varkappa}$ 的代数和，它們的前一个指标所代表的枝的全体构成面（閉路）$q$ 的边界，后一个指标所代表的枝的全体构成面（閉路）$p$ 的边界。

各項的符号各依“点”对“枝”，“面”对“枝”的联接符号的同或异而分正或負（注意节点电流源当流入这一节点时算作正）。为了研究机械地进行这种操作的技巧，我們举例如下。

先把图 ±12.1 內各个节点的星形和面的閉路表示成图 ±15.1 那样的关系点的順序[20]：

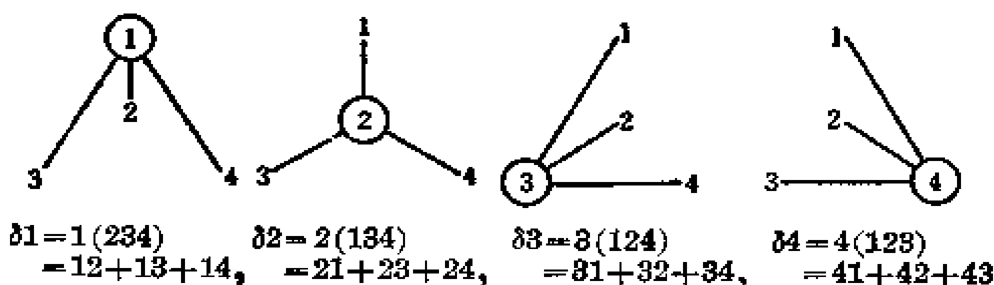



图　+15.1

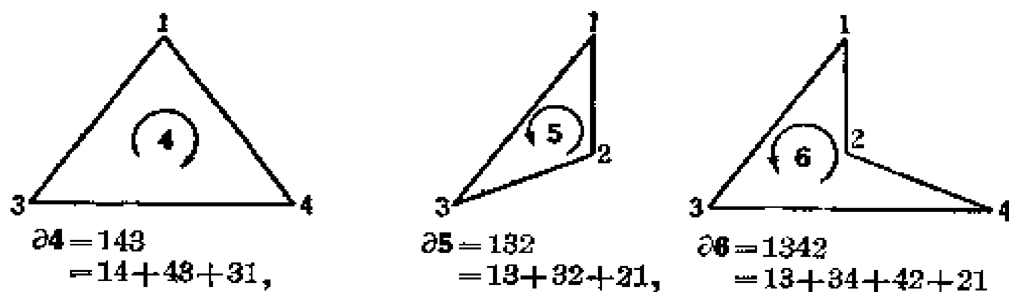



图　−15.1

第二行把各星形或閉路表示成它們所含的枝的和。如果命

$$y^{ab} \stackrel{d}{=} y^{\beta a}_{\beta b}, \quad (+15.2) \qquad\qquad z_{qp} \stackrel{d}{=} z^{\gamma q}_{\gamma p}, \quad (-15.2)$$

那末，例如

$$\begin{aligned} y^{11} &= y^{\delta 1}_{\delta 1} = y^{1(234)}_{1(234)} = y^{12+13+14}_{12+13+14}, \\ y^{21} &= y^{\delta 2}_{\delta 1} = y^{2(134)}_{1(234)} = y^{21+23+24}_{12+13+14}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (+15.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{44} &= z^{\gamma 4}_{\gamma 4} = z^{143}_{143} = z^{14+43+31}_{14+43+31}, \\ z_{54} &= z^{\gamma 5}_{\gamma 4} = z^{132}_{143} = z^{13+32+21}_{14+43+31}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (-15.3) \end{aligned}$$

这些关系显然成立。依上下指标中各項的一切可能的結合写出来，可得

$$\begin{aligned} y^{11} = & y^{12}_{12} + y^{13}_{12} + y^{14}_{12} \\ & + y^{12}_{13} + y^{13}_{13} + y^{14}_{13} \\ & + y^{12}_{14} + y^{13}_{14} + y^{14}_{14}, \\ y^{21} = & y^{21}_{12} + y^{23}_{12} + y^{24}_{12} \\ & + y^{21}_{13} + y^{23}_{13} + y^{24}_{13} \\ & + y^{21}_{14} + y^{23}_{14} + y^{24}_{14}, \\ & \cdots\cdots\cdots \qquad (+15.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{44} = & z^{14}_{14} + z^{43}_{14} + z^{31}_{14} \\ & + z^{14}_{43} + z^{43}_{43} + z^{31}_{43} \\ & + z^{14}_{31} + z^{43}_{31} + z^{31}_{31}, \\ z_{54} = & z^{13}_{14} + z^{32}_{14} + z^{21}_{14} \\ & + z^{13}_{43} + z^{32}_{43} + z^{21}_{43} \\ & + z^{13}_{31} + z^{32}_{31} + z^{21}_{31}, \\ & \cdots\cdots\cdots \qquad (-15.4) \end{aligned}$$

这里如果規定当各項的指标对与所設的枝的方向相同（反）时带“+”号，相反时带“−”号，那末也可以改用 $y^{\kappa\lambda}$, $z_{\lambda\mu}$ 表示。也就是說，依照图 +12.1 的各枝的方向写成

$$\begin{aligned} y^{11} = & y^{11} - y^{31} - y^{41} \\ & - y^{13} + y^{33} + y^{43} \\ & - y^{14} + y^{34} + y^{44}, \\ y^{21} = & - y^{11} + y^{51} + y^{61} \\ & + y^{13} - y^{53} - y^{63} \\ & + y^{14} - y^{54} - y^{64}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (+15.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{44} = & z_{44} - z_{24} - z_{34} \\ & - z_{42} + z_{22} + z_{32} \\ & - z_{43} + z_{23} + z_{33}, \\ z_{54} = & z_{34} + z_{54} + z_{14} \\ & - z_{32} - z_{52} - z_{12} \\ & - z_{33} - z_{53} - z_{13}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (-15.5) \end{aligned}$$

等等。不过要把不存在的东西从(±15.4)中去掉。

特别当沒有相互結合时（$y^{\varkappa\lambda}$ 仅由本身枝导納 $\overset{\varkappa}{y}\overset{d}{=}y^{\varkappa\varkappa}$ 組成，$z_{\lambda\varkappa}$ 仅由本身枝阻抗 $\underset{\lambda}{z}\overset{d}{=}z_{\lambda\lambda}$ 組成），

"$y^{aa}$ 是 $\delta a$ 里的 $\overset{\varkappa}{y}$ 的和，$y^{ab}$ $(a\neq b)$ 是 $\delta a\cap\delta b$ 里的 $\overset{\varkappa}{y}$ 的和的負值"。

"$z_{qq}$ 是 $\partial q$ 里的 $\underset{\lambda}{z}$ 的和，$z_{qp}$ $(q\neq p)$ 是 $\partial q\cap\partial p$ 里的 $\underset{\lambda}{z}$ 的代数和"。

这里的符号依上面的法則决定。也可以依各枝和节点或閉路的联接方向的同或异而取 + 或 − 号[6]。

$$y^{ab}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline \overset{1}{y}+\overset{3}{y}+\overset{4}{y} & -\overset{1}{y} & -\overset{3}{y}\\ \hline -\overset{1}{y} & \overset{1}{y}+\overset{5}{y}+\overset{6}{y} & -\overset{5}{y}\\ \hline -\overset{3}{y} & -\overset{5}{y} & \overset{2}{y}+\overset{3}{y}+\overset{5}{y}\\ \hline\end{array}\,.$$

$$z_{qp}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline \underset{2}{z}+\underset{3}{z}+\underset{4}{z} & -\underset{3}{z} & -\underset{2}{z}-\underset{3}{z}\\ \hline -\underset{3}{z} & \underset{1}{z}+\underset{3}{z}+\underset{5}{z} & \underset{1}{z}+\underset{3}{z}\\ \hline -\underset{2}{z}-\underset{3}{z} & \underset{1}{z}+\underset{3}{z} & \underset{1}{z}+\underset{2}{z}+\underset{3}{z}+\underset{6}{z}\\ \hline\end{array}\,.$$

彼此对应于反边界（边界）

$\delta 1=1+3+4$，$\delta 2=1+5+6$，$\delta 3=2+3+5$

$\partial 4=2+3+4$，$\partial 5=1+3+5$，$\partial 6=1+2+3+6$

的共同部分。（(±15.2)～(±15.5)是这种一般运算。）

## §16　节点电流源和閉路电压源网絡的直接分析法

把前节的(±15.1)形式地解出来，就成为

$$V_b=(D^{a}_{\cdot\varkappa}y^{\varkappa\lambda}D^{\cdot b}_{\lambda})^{-1}s^a=(y^{ab})^{-1}s^a\overset{d}{=}z_{ba}s_a,\qquad(+16.1)$$

$$J^p=(R^{\cdot\lambda}_{q}z_{\lambda\varkappa}R^{\varkappa}_{\cdot p})^{-1}e_q=(z_{qp})^{-1}e_q\overset{d}{=}y^{pq}e_q,\qquad(-16.1)$$

$z_{ba}$ 和 $y^{pq}$ 可以按照 Cramer 法則❶各从 $y^{ab}$ 和 $z_{qp}$ 的逆方陣中求

❶ 参考附录1。

得，分别为

$$z_{ba} \stackrel{d}{=} (y^{ab})^{-1} \stackrel{d}{=} Y_{ba}/Y, \quad (+16.2)$$

$$y^{pq} \stackrel{d}{=} (z_{qp})^{-1} \stackrel{d}{=} Z^{pq}/Z, \quad (-16.2)$$

这里，

$$Y \stackrel{d}{=} m!\ D_{[\varkappa_1\cdots\varkappa_m]} y^{\varkappa_1\lambda_1}\cdots \cdots y^{\varkappa_m\lambda_m} D_{[\lambda_1\cdots\lambda_m]}, \quad (+16.3)$$

$$Z \stackrel{d}{=} k!\ R^{[\lambda_1\cdots\lambda_k]} z_{\lambda_1\varkappa_1}\cdots \cdots z_{\lambda_k\varkappa_k} R^{[\varkappa_1\cdots\varkappa_k]}, \quad (-16.3)$$

$$Y_{ba} \stackrel{d}{=} m!\ m D_{[\dot{a}\varkappa_2\cdots\varkappa_m]} y^{\varkappa_2\lambda_2}\cdots \cdots y^{\varkappa_m\lambda_m} D_{[\dot{b}\varkappa_2\cdots\varkappa_m]}. \quad (+16.4)$$

$$Z^{pq} \stackrel{d}{=} k!\ k R^{[\dot{q}\lambda_2\cdots\lambda_k]} z_{\lambda_2\varkappa_2}\cdots \cdots z_{\lambda_k\varkappa_k} R^{[\dot{p}\varkappa_2\cdots\varkappa_k]}. \quad (-16.4)$$

$\dot{a}$ 是新插入的从节点 $a$ 出发指向节点 m+1（假設在这一点的节点电位是零）的枝。

$\dot{q}$ 是新插入的枝，做法是这样：反树上有一枝对应于閉路 $q$（§11 开头所說的那种原始閉路），$\dot{q}$ 就依閉路的走向串联在这一枝的一端[1]。

因此

“$Y$ 是前指标 $\varkappa_1\cdots\varkappa_m$ 和后指标 $\lambda_1\cdots\lambda_m$ 都成树的那些 $y^{\varkappa_1\lambda_1}\cdots y^{\varkappa_m\lambda_m}$ 的代数和，各項的符号与 $D_{[\varkappa_1\cdots\varkappa_m]}/D_{[\lambda_1\cdots\lambda_m]}$ 的相同[2]。”

“$Z$ 是前指标 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ 和后指标 $\varkappa_1\cdots\varkappa_k$ 都成反树的那些 $z_{\lambda_1\varkappa_1}\cdots z_{\lambda_k\varkappa_k}$ 的代数和，各項的符号与 $R^{[\lambda_1\cdots\lambda_k]}/R^{[\varkappa_1\cdots\varkappa_k]}$ 的相同[2]。”

这种关系簡記为

$$Y:\quad t\overset{y}{\bigcap}t. \quad (+16.5)$$

$$Z:\quad \bar{t}\overset{z}{\bigcap}\bar{t}. \quad (-16.5)$$

特别，当沒有相互結合的时候，如果把 $Y$，$Z$ 分别記为 $T$，$\overline{T}$，那末

---

[1] 参看后面图 −17.2. 对于 $\dot{q}$ 这样的枝，$R^{\dot{q}}_{m+i}=\delta^{q}_{m+i}$. 所以在行列式 $Z$ 内，元素 $z_{qp}$ 的余子式 $Z^{pq}$ 可以表成(−16.4)。参看附录1关于 Cramer 法則的說明，那里用 $\Delta^i_j$ 代替通常的記号 $\delta^i_j$.——譯者注

[2] 参看 §12。

“$T$ 是成为树的 $\overset{\varkappa}{y}$ 的积 $\overset{\varkappa_1}{y}\cdots\overset{\varkappa_m}{y}$ 的和”。这关系簡記为

$$T:t. \qquad (+16.6)$$

“$\bar{T}$ 是成为反树的 $\underset{\lambda}{z}$ 的积 $\underset{\lambda_1}{z}\cdots\underset{\lambda_k}{z}$ 的和。”这关系簡記为

$$\bar{T}:\bar{t}. \qquad (-16.6)$$

又如果

把节点 $a$ 和节点 $m+1$ 看做同一节点时接續中的树記为 $t(a)$，

把相当于閉路 $q$ 的反树的枝的一端开放时接續中的反树記为 $\bar{t}(\bar{q})$，

那末分子是代数和

$$Y_{ba}:t(a)\overset{y}{\cap}t(b). \qquad (+16.7)$$

$$Z^{pq}:\bar{t}(\bar{q})\overset{z}{\cap}\bar{t}(\bar{p}). \qquad (-16.7)$$

它的各项的符号根据

$$D_{[\dot{a}\varkappa_2\cdots\varkappa_m]}/D_{[\dot{b}\lambda_2\cdots\lambda_m]}$$

$$R^{[\dot{q}\varkappa_2\cdots\varkappa_k]}/R^{[\dot{p}\lambda_2\cdots\lambda_k]}$$

的图解判断来决定。沒有相互結合时 $Y_{ba}$, $Z^{pq}$ 改写成 $T_{ba}$, $\bar{T}^{pq}$.

$$T_{bb}:t(b),$$
$$T_{ba}(b\neq a):t(a)\cap t(b). \qquad (+16.8)$$

$$\bar{T}^{pp}:\bar{t}(\bar{p}),$$
$$\bar{T}^{pq}(p\neq q):\bar{t}(\bar{q})\cap\bar{t}(\bar{p}). \qquad (-16.8)$$

$T(\bar{T})$ 的项数等于能够把枝組成两个相等的树(反树)的組合的种数。这数可以当做下列的行列式 $D$ 和 $R$ 来計算。又 $T/\bar{T}$ 等于枝的自导納的积，$\bar{T}/T$ 等于枝的自阻抗的积。(一般，$Y/Z$ 等于枝导納方陣的行列式，$Z/Y$ 等于枝阻抗方陣的行列式[15],[16]。)这些在驗算过程中时常用到。

“假設所有的 $\overset{\varkappa}{y}$ 都是 1，那末 $T$ 就是树的組合数目”。这数目等于

$$D=|D^{a}_{\cdot\varkappa}\delta^{\varkappa\lambda}D^{\cdot b}_{\lambda}|. \qquad (+16.9)$$

計算一下得到

“假設所有的 $\underset{\lambda}{z}$ 都是 1，那末 $\bar{T}$ 就是反树的組合数目”。这数目等于

$$R\overset{\mathrm{d}}{=}|R^{\cdot\lambda}_{q}\delta_{\lambda\varkappa}R^{\varkappa}_{\cdot p}|. \qquad (-16.9)$$

計算一下得到

$$R=\begin{bmatrix} \partial(\mathbf{m}+1) & \partial(\mathbf{m}+1)\cap\partial(\mathbf{m}+2)\cdots & \partial(\mathbf{m}+1)\cap\partial\mathbf{n} \\ \partial(\mathbf{m}+2)\cap\partial(\mathbf{m}+1) & \partial(\mathbf{m}+2) & \cdots\partial(\mathbf{m}+2)\cap\partial\mathbf{n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \partial\mathbf{n}\cap\partial(\mathbf{m}+1) & \partial\mathbf{n}\cap\partial(\mathbf{m}+2) \quad \cdots & \partial\mathbf{n} \end{bmatrix}^{-❶}$$

这里 $\partial q$ 是閉路 $q$ 内枝的数目，$\partial q\cap\partial p$ 是属于閉路 $p$ 和 $q$ 两者的枝的数目的代数和（与閉路 $p$, $q$ 的联接方向相同的是正（+1），相反的是負（−1））。

$$D=\begin{bmatrix} \delta 1 & \delta 1\cap\delta 2\cdots & \delta 1\cap\delta\mathrm{m} \\ \delta 2\cap\delta 1 & \delta 2 & \cdots\delta 2\cap\delta\mathrm{m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \delta\mathrm{m}\cap\delta 1 & \delta\mathrm{m}\cap\delta 2\cdots & \delta\mathrm{m} \end{bmatrix}^{+❶}$$

这里 $\delta a$ 是联在节点 $a$ 上枝的数目，$\delta a\cap\delta b$ 是联接 $a$ 和 $b$ 的枝的数目的負值。

一个树有一个反树与之对应，結果

$$D=R, \tag{16.10}$$

例如在图 ±12.1 中

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=16. \qquad R=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}=16.$$

## § 17 直接分析法的实例

我們根据图 ±12.1 用直接法来求在沒有相互結合的情况下的 $z_{ba}$, $y^{pq}$（参看[6]）. 首先可以从图中看出树和反树。所对应的 $T$ 和 $\overline{T}$ 是

+❶ 不用 $\delta a\cap\delta b$, 用 $a\cup b$ 表示也很方便。

−❶ 不用 $\partial q\cap\partial p$, 用 $q\cup p$ 表示也很方便。

$$T=\overset{123}{yyy}+\overset{124}{yyy}+\overset{125}{yyy}+\overset{126}{yyy}$$
$$+\overset{134}{yyy}+\overset{136}{yyy}+\overset{145}{yyy}+\overset{156}{yyy}$$
$$+\overset{235}{yyy}+\overset{236}{yyy}+\overset{245}{yyy}+\overset{246}{yyy}$$
$$+\overset{345}{yyy}+\overset{346}{yyy}+\overset{356}{yyy}+\overset{456}{yyy}.$$

至于分子以 $T_{11}$, $T_{21}$ 为例各是

$$T_{11}:t(1),\ T_{21}:t(1)\cap t(2),$$

由图 ±17.1 各得到

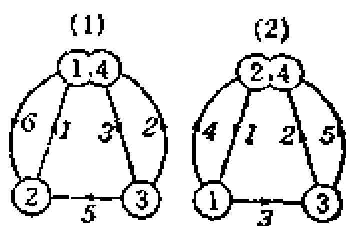



图 +17.1

$t(1)$: *12, 13, 15, 25, 26, 35, 36, 56*,

$t(2)$: *12, 13, 15, 23, 24, 34, 35, 45*,

$\therefore\ t(1)\cap t(2)$: *12, 13, 15, 35*.

因此

$$z_{11}=T_{11}/T$$
$$=(\overset{12}{yy}+\overset{13}{yy}+\overset{15}{yy}+\overset{25}{yy}+\overset{26}{yy}$$
$$+\overset{35}{yy}+\overset{36}{yy}+\overset{56}{yy})/T,$$

$$z_{21}=T_{21}/T$$
$$=(\overset{12}{yy}+\overset{13}{yy}+\overset{15}{yy}+\overset{35}{yy})/T.$$

$$\bar{T}=\underset{123}{zzz}+\underset{124}{zzz}+\underset{125}{zzz}+\underset{126}{zzz}$$
$$+\underset{135}{zzz}+\underset{136}{zzz}+\underset{145}{zzz}+\underset{146}{zzz}$$
$$+\underset{234}{zzz}+\underset{236}{zzz}+\underset{245}{zzz}+\underset{256}{zzz}$$
$$+\underset{345}{zzz}+\underset{346}{zzz}+\underset{356}{zzz}+\underset{456}{zzz}.$$

至于分子各以 $\bar{T}^{44}$, $\bar{T}^{54}$ 为例各是

$$\bar{T}^{44}:\bar{t}(\bar{4}),\ \bar{T}^{54}:\bar{t}(\bar{4})\cap\bar{t}(\bar{5}),$$

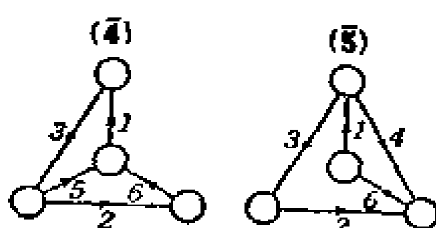



图 −17.1

$\bar{t}(\bar{4})$: *12, 15, 16, 23, 25, 35, 36, 56*,

$\bar{t}(\bar{5})$: *12, 13, 14, 24, 26, 34, 36, 46*,

$\therefore\ \bar{t}(\bar{4})\cap\bar{t}(\bar{5})$: *12, 36*.

$$y^{44}=\bar{T}^{44}/\bar{T}$$
$$=(\underset{12}{zz}+\underset{15}{zz}+\underset{16}{zz}+\underset{23}{zz}+\underset{25}{zz}+\underset{35}{zz}$$
$$+\underset{36}{zz}+\underset{56}{zz})/\bar{T},$$

又由图 −17.2 知道

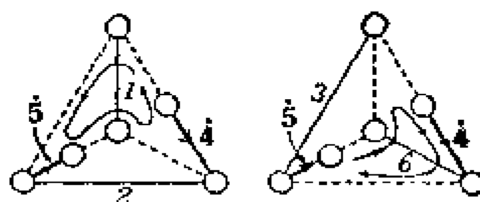



图 −17.2

| | |
|---|---|
| | $R^{[\dot{4}12]}=-R^{[\dot{5}12]}$, |
| | $R^{[\dot{4}36]}=R^{[\dot{5}36]}$, |
| | 所以 |
| | $y^{54}=T^{54}/T=(-\underset{12}{zz}+\underset{36}{zz})/T$. |

有相互結合时，只要在以上各項之外找出这种結合有关的項再添加上去就可以了。

| | |
|---|---|
| 例如，如果 $y^{25}$, $y^{52}(\neq y^{25})$存在，那末分母添上 | 例如，如果 $z_{25}$, $z_{52}$ $(\neq z_{25})$存在，那末分母添上 |
| (i) $y^{\kappa_1\lambda_1}y^{\kappa_2\lambda_2}y^{25}$, 即 $\overset{\kappa_1\kappa_2}{yy}y^{25}$, | (i) $z_{\lambda_1\kappa_1}z_{\lambda_2\kappa_2}z_{25}$, 即 $\underset{\lambda_1\lambda_2}{zz}z_{25}$, |
| (ii) $y^{\kappa_1\lambda_1}y^{\kappa_2\lambda_2}y^{52}$, 即 $\overset{\kappa_1\kappa_2}{yy}y^{52}$, | (ii) $z_{\lambda_1\kappa_1}z_{\lambda_2\kappa_2}z_{52}$, 即 $\underset{\lambda_1\lambda_2}{zz}z_{52}$, |
| (iii) $y^{\kappa\lambda}y^{25}y^{52}$, 即 $\overset{\kappa}{y}y^{25}y^{52}$ | (iii) $z_{\lambda\kappa}z_{25}z_{52}$, 即 $\underset{\lambda}{z}z_{25}z_{52}$ |

这样的項。因此各可以从❶

| | |
|---|---|
| (i) $t(2)\cap t(5)=t(2\bar{5})\cap t(5\bar{2})$, | (i) $\bar{t}(\bar{2})\cap\bar{t}(\bar{5})=\bar{t}(\bar{2}5)\cap\bar{t}(\bar{5}2)$, |
| (ii) 同(i), | (ii) 同(i), |
| (iii) $t(25)$ | (iii) $\bar{t}(\bar{2}\bar{5})$ |
| 中得到，即 | 中得到，即 |
| $t(2\bar{5})$: 13, 14, 16, 36, 46, | $\bar{t}(\bar{2}5)$: 13, 14, 16, 34, 36, |
| $t(5\bar{2})$: 14, 16, 34, 36, 46, | $\bar{t}(\bar{5}2)$: 13, 14, 34, 36, 46, |
| $\therefore t(2\bar{5})\cap t(5\bar{2})$: 14, 16, 36, 46. | $\therefore \bar{t}(\bar{2}5)\cap\bar{t}(\bar{5}2)$: 13, 14, 34, 36. |
| 又 $t(25)$: 1, 3, 4. | 又 $\bar{t}(\bar{2}\bar{5})$: 1, 4, 6. |

其次檢查符号。由图，

| | |
|---|---|
| $D_{[\kappa\lambda 2]}=D_{[\kappa\lambda 5]}$, | $R^{[\lambda\kappa 2]}=-R^{[\lambda\kappa 5]}$, |

又由指标的次序，

| | |
|---|---|
| $D_{[\kappa 25]}=-D_{[\kappa 52]}$ | $R^{[\lambda 25]}=-R^{[\lambda 52]}$, |

---

❶ $(\kappa)$和$(\bar{\lambda})$等各表示把枝 $\kappa$ 变成短路和把枝 $\lambda$ 变成开路以后的接續。

所以

$$Y=T+(\overset{14}{yy}+\overset{16}{yy}+\overset{36}{yy}+\overset{46}{yy})(y^{25}+y^{52})-(\overset{1}{y}+\overset{3}{y}+\overset{4}{y})y^{25}y^{52}.$$

$$Z=\overline{T}-(\underset{13}{zz}+\underset{14}{zz}+\underset{34}{zz}+\underset{36}{zz})(z_{25}+z_{52})-(\underset{1}{z}+\underset{4}{z}+\underset{6}{z})z_{25}z_{52}.$$

分子也可以同样求得，从略。

## §18 枝电流源和枝电压源网絡

解齐次 2-Kh(−9.5) 时曾得到(−9.7)：

$$U_\lambda=D_\lambda^{\cdot b}V_b\quad(e_\lambda=0).$$

$V_b$ 是由节点电流源 $s^a$ 产生的节点电位

$$V_b=z_{ba}s^a.$$

因此由

$$s^a=D_{\cdot\varkappa}^{a}s^\varkappa$$

所定义的 $s^\varkappa$ 叫做**枝电流源**。

解齐次 1-Kh(+9.5) 时曾得到(+9.7)：

$$I^\varkappa=R_{\cdot p}^{\varkappa}J^p\quad(s^\varkappa=0).$$

$J^p$ 是由閉路电动势 $e_q$ 产生的閉路电流

$$J^p=y^{pq}e_q.$$

因此由

$$e_q=R_q^{\cdot\lambda}e_\lambda$$

所定义的 $e_\lambda$ 叫做**枝电压源**❶。

显然，

$$U_\lambda=D_{\lambda\varkappa}s^\varkappa\quad(e_\lambda=0),$$

$$D_{\lambda\varkappa}\overset{\mathrm{d}}{=}D_\lambda^{\cdot b}z_{ba}D_{\cdot\varkappa}^{a}.\qquad(+18.1)$$

$$I^\varkappa=R^{\varkappa\lambda}e_\lambda\quad(s^\varkappa=0),$$

$$R^{\varkappa\lambda}\overset{\mathrm{d}}{=}R_{\cdot p}^{\varkappa}y^{pq}R_q^{\cdot\lambda}.\qquad(-18.1)$$

$z_{ba}$ 和 $y^{pq}$ 根据 §16 就可以得到。实际上把(±16.2)，(±16.3)，(±16.4)代入計算一下就得到

$$D_{\lambda\varkappa}=m!\,mD_{[\varkappa\varkappa_1\cdots\varkappa_m]}y^{\varkappa_1\lambda_1}\cdots y^{\varkappa_m\lambda_m}D_{[\lambda\lambda_1\cdots\lambda_m]}/Y,\qquad(+18.2)$$

$$R^{\varkappa\lambda}=k!\,kR^{[\lambda\lambda_1\cdots\lambda_k]}z_{\lambda_1\varkappa_1}\cdots z_{\lambda_k\varkappa_k}R^{[\varkappa\varkappa_1\cdots\varkappa_k]}/Z.\qquad(-18.2)$$

分子各表示成

$$t(\varkappa)\overset{y}{\bigcap}t(\lambda).\qquad(+18.3)$$

$$\bar{t}(\lambda)\overset{z}{\bigcap}\bar{t}(\varkappa).\qquad(-18.3)$$

以下的实例的直接計算按照前一节进行。

❶ 电压源也叫电动势。下同。

$D_{\lambda\varkappa}$ 和 $R^{\varkappa\lambda}$

（i） 当 $\varkappa=\lambda$ 时各是合成的枝阻抗和导納，

（ii） 当 $\varkappa\neq\lambda$ 时各是傳輸枝阻抗和导納。

特別在沒有相互結合的情况下，根据 § 13 的考察，得到傳輸阻抗($\varkappa\neq\lambda$)的公式[18], [21]

$$D_{\lambda\varkappa}=L_{\partial\lambda,\partial\varkappa}/T. \qquad (+18.4)$$

这里 $\partial\lambda=c-d$, $\partial\varkappa=a-b$,

(+i)
- $L_{\partial\lambda,\partial\varkappa}=L_{c-d,a-b}=T_{ca,db}-T_{cb,da}$,
- $T_{ca,db}$ 是属于 $t_{ca,db}$ 的各个双树的枝导納 $\overset{\varkappa}{y}$ 的乘积的和；
- $T_{cb,da}$ 是属于 $t_{cb,da}$ 的各个双树的枝导納 $\overset{\varkappa}{y}$ 的乘积的和。

和它部分地成对偶的傳輸导納的公式是

$$R^{\varkappa\lambda}=L^{\partial\varkappa,\partial\lambda}/\overline{T}. \qquad (-18.4)$$

这里

(−i)
- $\overline{L}^{\partial\varkappa,\partial\lambda}=\overline{L}^{a-b,c-d}=-\overline{T}^{ac,bd}+\overline{T}^{ad,bc}$,
- $\overline{T}^{ac,bd}$ 是属于 $\overline{t}^{ac,bd}$ 的各个双反树的枝阻抗 $\underset{\lambda}{z}$ 的乘积的和；
- $\overline{T}^{ad,bc}$ 是属于 $\overline{t}^{ad,bc}$ 的各个双反树的枝阻抗 $\underset{\lambda}{z}$ 的乘积的和。

此外，如果考察范圍限于平面网絡(与球面同胚的东西) ❶，那末可以得到以上公式的对偶形式

$$R^{\varkappa\lambda}=\overline{L}^{\delta\varkappa,\delta\lambda}/\overline{T} \qquad (-18.5)$$

和

$$D_{\lambda\varkappa}=L_{\delta\lambda,\delta\varkappa}/T. \qquad (+18.5)$$

❶ 参考 § 21。如果沒有这限制，則(+18.4)和(−18.5)，(−18.4)和(+18.5)的对偶对应不成立。

这里所有的反树的枝都夹在相邻的2維胞中間，与其他的2維胞沒有直接的联系，所以

$$\delta\varkappa=q-p,\quad \delta\lambda=s-r,$$

(+ii)
$\bar{L}^{\delta\varkappa,\delta\lambda}=\bar{L}^{q-p,s-r}=\bar{T}^{qs,pr}-\bar{T}^{qr,ps}$,
$\bar{T}^{qs,pr}$ 是属于 $\bar{t}^{qs,pr}$ 的各个双反树的枝的阻抗 $\overset{z}{\lambda}$ 的乘积的和；
$\bar{T}^{qr,ps}$ 是属于 $\bar{t}^{qr,ps}$ 的各个双反树的枝的阻抗 $\overset{z}{\lambda}$ 的乘积的和，

(−ii)
$L_{\delta\lambda,\delta\varkappa}=L_{s-r,q-p}=-T_{sq,rp}+T_{sp,rq}$,
$T_{sq,rp}$ 是属于 $t_{sq,rp}$ 的各个双树的导納 $\overset{\varkappa}{y}$ 的乘积的和；
$T_{sp,rq}$ 是属于 $t_{sp,rq}$ 的各个双树的导納 $\overset{\varkappa}{y}$ 的乘积的和。

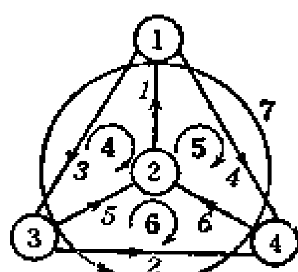


图 18.1

例如在图18.1的情况下，

$$\begin{cases}\partial 1=2-1,\\ \partial 2=3-4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta 1=\mathbf{5}-\mathbf{4},\\ \delta 2=\mathbf{7}-\mathbf{6},\end{cases}$$

所以

(±i)
$$D_{21}=L_{\partial 2,\partial 1}/T,$$
$$L_{\partial 2,\partial 1}=L_{3-4,2-1}=T_{32,41}-T_{31,42};$$
$$R^{21}=\bar{L}^{\partial 2,\partial 1}/\bar{T},$$
$$\bar{L}^{\partial 2,\partial 1}=\bar{L}^{3-4,2-1}=-\bar{T}^{32,41}+\bar{T}^{31,42};$$

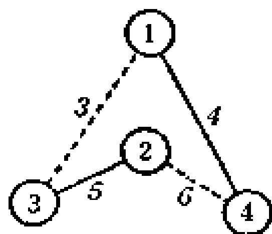


图 +18.2

$t_{32,41}=45$,
$\bar{t}^{32,41}=36$;

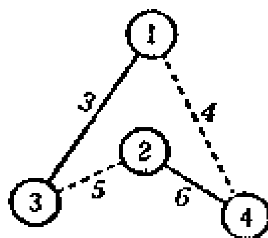


图 +18.3

$t_{31,42}=36$,
$\bar{t}^{31,42}=45$.

因此 $D_{21}=(\overset{45}{yy}-\overset{36}{yy})/T$，$R^{21}=(-\underset{36}{zz}+\underset{45}{zz})/\overline{T}$。

(±ii) $R^{21}=\overline{L}^{52,51}/\overline{T}$，

$\overline{L}^{52,51}=\overline{L}^{7-6,5-4}=\overline{T}^{75,64}-\overline{T}^{74,65}$；

$D_{21}=L_{52,51}/T$，

$L_{52,51}=L_{7-6,5-4}=-T_{75,64}+T_{74,65}$；

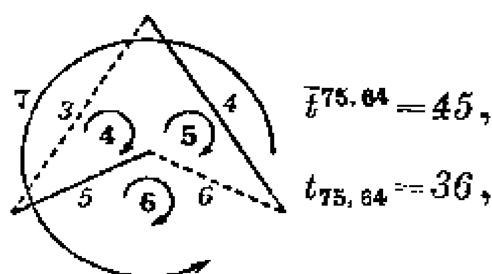



图 —18.2

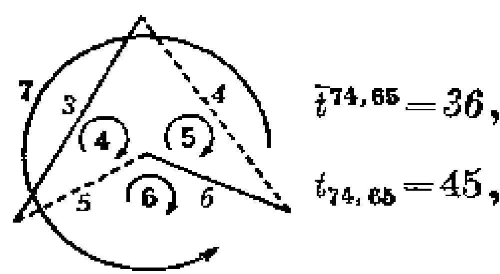



图 —18.3

因此 $R^{21}=(\underset{45}{zz}-\underset{36}{zz})/\overline{T}$，$D_{21}=(-\overset{36}{yy}+\overset{45}{yy})/T$。

## §19 四端网絡的常数

前节的公式都直接适用于一般的 $n$ 端网絡。由于习惯和实用上的方便，对于四端网絡的情况，这些公式是在所謂**四端网絡常数**的名义下引用的，因为常常要用这种計算，所以这里特地把結果写出来。

四端网絡的輸入和輸出端各用 $I$ 和 $II$ 这个枝代表(參照图 19.1)。輸入和輸出端的电压和电流各假定是 $E_I$, $E_{II}$, $I^I$, $I^{II}$，那末一般有下列关系：

$$\begin{vmatrix} E_I \\ I^I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_I^{\cdot II} & B_{I\,II} \\ C^{I\,II} & D^I_{\cdot II} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_{II} \\ I^{II} \end{vmatrix}, \qquad (19.1)$$

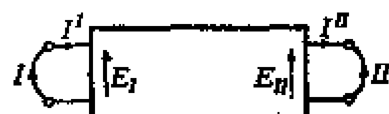



图 19.1

这里 $A_I^{\cdot II}$, $B_{I\,II}$, $C^{I\,II}$, $D^I_{\cdot II}$ 叫做四端网絡的常数。这个图解法用前述記号表示时有如表 ±19.1。

表 +19.1 $y^{\kappa\lambda}$ 已知的情况

| | | 指标(枝的組合) | 符 号 |
|---|---|---|---|
| 分母 | | $t(I\,\overline{II})\overset{y}{\cap}t(\bar{I}\,II)$ | $D_{[I\cdots]}/D_{[II\cdots]}$ |
| 分 | $A_I^{II}$ | $t(I\,\overline{II})\overset{y}{\cap}t(I\,\overline{II})$ | $\overset{I\overline{II}}{D}_{[\cdots]}/\overset{I\overline{II}}{D}_{[\cdots]}$ |
| | $B_{I\,II}$ | $t(I\,II)\overset{y}{\cap}t(I\,II)$ | $\overset{I\,II}{D}_{[\cdots]}/\overset{I\,II}{D}_{[\cdots]}$ |
| | $C^{I\,II}$ | $t(\bar{I}\,\overline{II})\overset{y}{\cap}t(\bar{I}\,\overline{II})$ | $\overset{\bar{I}\overline{II}}{D}_{[\cdots]}/\overset{I\overline{II}}{D}_{[\cdots]}$ |
| 子 | $D^I_{II}$ | $t(\bar{I}\,II)\overset{y}{\cap}t(\bar{I}\,II)$ | $\overset{I\,II}{D}_{[\cdots]}/\overset{\bar{I}\,II}{D}_{[\cdots]}$ |

表 −19.1 $z_{\lambda\kappa}$ 已知的情况

| | | 指标(枝的組合) | 符 号 |
|---|---|---|---|
| 分母 | | $\bar{t}(\bar{I}\,\overline{II})\overset{z}{\cap}\bar{t}(I\,\overline{II})$ | $-R^{[I\cdots]}/R^{[II\cdots]}$ |
| 分 | $A_I^{II}$ | $\bar{t}(I\,\overline{II})\overset{z}{\cap}\bar{t}(I\,\overline{II})$ | $R^{[\cdots]}_{I\overline{II}}/R^{[\cdots]}_{I\overline{II}}$ |
| | $B_{I\,II}$ | $\bar{t}(I\,II)\overset{z}{\cap}\bar{t}(I\,II)$ | $R^{[\cdots]}_{I\,II}/R^{[\cdots]}_{I\,II}$ |
| | $C^{I\,II}$ | $\bar{t}(\bar{I}\,\overline{II})\overset{z}{\cap}\bar{t}(\bar{I}\,\overline{II})$ | $R^{[\cdots]}_{\bar{I}\overline{II}}/R^{[\cdots]}_{\bar{I}\overline{II}}$ |
| 子 | $D^I_{II}$ | $\bar{t}(\bar{I}\,II)\overset{z}{\cap}\bar{t}(\bar{I}\,II)$ | $R^{[\cdots]}_{\bar{I}\,II}/R^{[\cdots]}_{\bar{I}\,II\,I}$ |

这里，( )中的 $I$ 或 $II$ 各表示改成短路的枝，$\bar{I}$ 或 $\overline{II}$ 各表示改成开路的枝。$D$ 和 $R$ 的上或下的指标也有同样的意义。

# 第5章 网絡的变换

## §20 等价网絡

两个实际联接方法不同的电网絡，只要施加量和响应量之間的关系即阻抗（导納）是一样的，就說是**等价的**。在工程上如果遇到性质复杂的网絡，总想把它变换成比較簡单的网絡。因此如果研究了各种各样的**等价网絡**，能够把原来网絡的全部或者一部分变换成适当的等价网絡，使网絡的分析和实驗更容易，那是有很大价值的。

例如不更动一个所設的网絡的节点，只适当地变动联在它們之間的枝的种类、排列和数目，同时保持节点和节点間的相互导納和节点的自导納不变，那末从一切可能的等价网絡中选擇一个最簡单的来用在节点电位-节点电流源分析上是很合适的。又例如閉路不更动，只更动邻接的情况，同时使閉路間的相互阻抗和閉路的自阻抗保持不变，那末从一切可能的等价网絡中选擇一个最簡单的来用在閉路电流-閉路电动势的分析上也是很合适的。因此在前一种情况下可以用象图 +20.1 那样的**端子型**（星形）等价网絡，在后一种情况下可以用象图 −20.1 那样的**閉路型**（閉路枝集）等价网絡。（枝和节点、閉路指标的关系以后再說。）图 −20.1 里用虛綫画的閉曲綫是为了指出所有的实閉路結合在一起的。(除了实綫閉路以外沒有其他独立閉路。)

一般，如果元素間的相互导納是完全自由的，那末这样的变换总是可能的，但是如果有附带的限制，也可能有困难。一个最簡单例子是所謂 $\Delta$-$Y$ 变换❶。

---

❶ 还可以参考本丛书伏見--庄司:《結晶統計与代数》，孙擇瀛譯，§4。

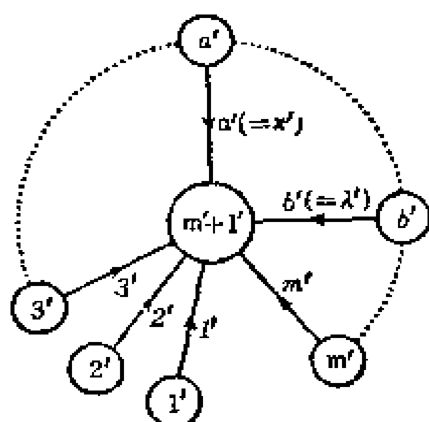



图 +20.1

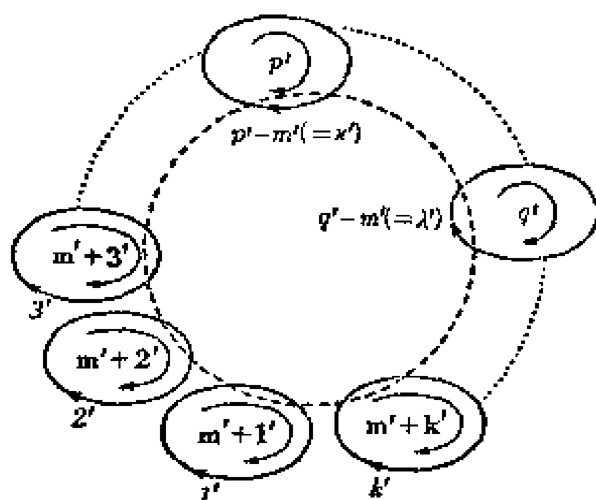



图 -20.1

这是由只有自导納的枝所組成的网絡之間的相互变换。先考虑1維星形接續跟完全 $m$ 边形接續之間的变换，自导納如图±20.2. 这个无源网絡在外部电压电流分布不变的条件下，等价条件是

$$\overset{ab}{y}=\frac{\overset{a}{y}\overset{b}{y}}{\overset{1}{y}+\overset{2}{y}+\cdots+\overset{n}{y}}. \qquad (+20.1)$$

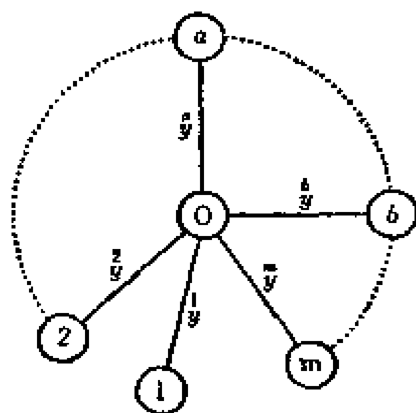



图 +20.2

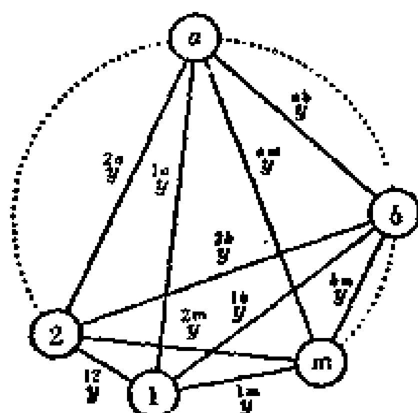
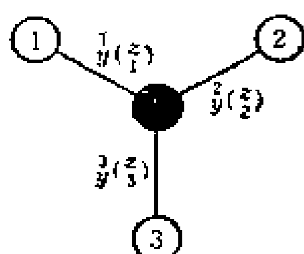


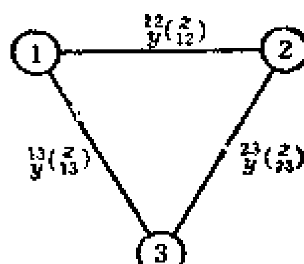

图 -20.2

因此图+20.2的 $m$ 星形可以变换成图-20.2的完全 $m$ 多边形。可是反变换不一定可能。因为 $\overset{a}{y}$ 的个数比 $\overset{ab}{y}$ 的个数少。只有当

$$m=\frac{1}{2}m(m-1) \qquad (20.2)$$

的时候两者的个数才一致，这时两个方向的变换都可能。除了 $m=0$ 以外，只能是 $m=3$，即限于 $\Delta$-$Y$ 变换（图 ±20.3）。这时(+20.1)变成


图 +20.3


图 −20.3

$$\overset{ab}{y}=\frac{\overset{a}{y}\overset{b}{y}}{\overset{1}{y}+\overset{2}{y}+\overset{3}{y}} \qquad (+20.3) \qquad\qquad \overset{a}{z}=\frac{\underset{ab}{z}\ \underset{ac}{z}}{\underset{12}{z}+\underset{13}{z}+\underset{23}{z}} \qquad (-20.3)$$

$(a, b, c=1, 2, 3; a\neq b\neq c\neq a)$。用这个 $\Delta$-$Y$ 变换改变网絡的一部分，使整个网絡变成比較簡单的网絡的方法是大家熟悉的。

一般，对于电网絡，与其把各枝的电流、电位差当做直接的未知数，不如先把节点电位或閉路电流当做未知数，求出以后再来决定前者更方便。这时候，使节点电位或閉路电流不变的等价变换是有效的。一个网絡的节点电位，閉路电流的解由基本公式可以写成

$$V_b=z_{ba}(s^a-D^a_{\cdot\kappa}y^{\kappa\lambda}e_\lambda)=(D^a_{\cdot\kappa}y^{\kappa\lambda}D_\lambda^{\cdot b})^{-1}\cdot(s^a-D^a_{\cdot\kappa}y^{\kappa\lambda}e_\lambda), \qquad (+20.4)$$

$$J^p=y^{pq}(e_q-R_q^{\cdot\lambda}z_{\lambda\kappa}s^\kappa)=(R_q^{\cdot\lambda}z_{\lambda\kappa}R^\kappa_{\cdot p})^{-1}\cdot(e_q-R_q^{\cdot\lambda}z_{\lambda\kappa}s^\kappa), \qquad (-20.4)$$

所以如果拿图 ±20.1 那样的端子型（星形）或閉路型(閉路枝集)的等价网絡来考虑，那末为了方便起見可以令

枝 $\kappa', \lambda'$: $1', 2', \cdots, m'$ | 枝 $\lambda', \kappa'$: $1', 2', \cdots, k'$

对应于

点 $a', b'$: $\mathbf{1}', \mathbf{2}', \cdots, \mathrm{m}'$, | 閉路 $q', p'$: $\mathbf{m}'+\mathbf{1}', \mathbf{m}'+\mathbf{2}', \cdots, \mathbf{m}'+\mathbf{k}'$,

于是电源各只有节点电流源 $s^{a'}$，閉路电压源 $e_{q'}$，因此

$$V_{b'}=(D^{a'}_{\cdot x'}y^{x'\lambda'}D^{\cdot b'}_{\lambda'})^{-1}s^{a'}. \qquad (+20.5)$$

$$J^{p'}=(R^{\cdot\lambda'}_{q'}z_{\lambda'x'}R^{x'}_{\cdot p'})^{-1}e_{q'}. \qquad (-20.5)$$

为了使 $V_{b'}=V_b$，$J^{p'}=J^p$，只要利用在这情况下 $D^{a'}_{\cdot x'}$，$R^{\cdot\lambda'}_{q'}$ 都是单位方陣的事实，可以令

$$\boxed{y^{x'\lambda'}}=\boxed{D^{a}_{\cdot x}y^{x\lambda}D^{\cdot b}_{\lambda}}, \qquad (+20.6)$$

$$\boxed{z_{\lambda'x'}}=\boxed{R^{\cdot\lambda}_{q}z_{\lambda x}R^{x}_{\cdot p}}, \qquad (-20.6)$$

$$s^{a'}=s^{a}-D^{a}_{\cdot x}y^{x\lambda}e_{\lambda}. \qquad (+20.7)$$

$$e_{q'}=e_{q}-R^{\cdot\lambda}_{q}z_{\lambda x}s^{x}. \qquad (-20.7)$$

(±20.6) 是决定等价网絡元素（枝）的导納（阻抗）的关系式。(±20.7) 称为**等价电源原理**，而且也是把枝电压源变換成节点电流源，把枝电流源变換成閉路电压源的关系式。如果可以对一个网絡的全部或者一部分施行这种等价变換，那末就可以由此得到比較簡单的网絡。

电网絡以外有些东西也能用电网絡来模拟，这也称为**等价网絡**，由此得到有效的模拟分析工具。

## §21 对偶变換

把閉路变成节点，把节点变成閉路，从而把联接两点的枝变成包圍一个2維閉路的枝，这种对偶的变換，在实用分析上时常发揮很大的作用。（图21.1內的粗綫是細綫的对偶接續。）

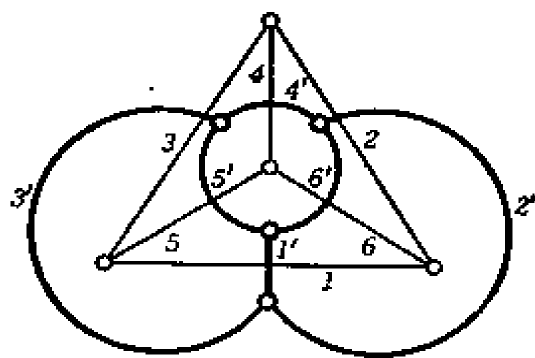


图 21.1

一般，两个各只包含一个独立接續（成分）的2維复形成对偶对应的条件是Betti数 $R^p$，$R'^p$ 和反Betti数 $R_p$，$R'_p$ 之間有

$$R^2=R_2=R'_0=R'^0=1,$$

$$1=R^0=R_0=R'_2=R'^2, \quad R^1=R_1=R'_1=R'^1$$

这样的关系。而且如果把 1 維圈都張在面上看成 2 維胞的边界，那末

$$R^1=R_1=R'_1=R'^1=0$$

必須成立(参考 § 4)。因此双方的 Euler-Poincaré 特征数 $\chi,\chi'$ 滿足 Euler 多面体条件(±3.9)。

从北极把球投影到平面上去是一个拓扑变换。从这里就可以知道平面接續图形跟 Euler 多面体是同胚的。因此在网絡分析中可以利用对偶变换的是平面接續。这时如果把接續矩陣，閉路矩陣各記为 $D^i_{\cdot\varkappa}$, $R_k^{\cdot\varkappa}$; $\bar{D}^k_{\cdot\varkappa}$, $\bar{R}_i^{\cdot\varkappa}$, 那末

$$D^i_{\cdot\varkappa}=\bar{R}_i^{\cdot\varkappa}, \quad (+21.1) \qquad R_k^{\cdot\varkappa}=\bar{D}^k_{\cdot\varkappa}, \quad (-21.1)$$

因此由基本公式得到

$$D^i_{\cdot\varkappa}\delta^{\varkappa\lambda}\bar{D}_\lambda^{\cdot k}=0. \quad (+21.2) \qquad R_k^{\cdot\varkappa}\delta_{\varkappa\lambda}\bar{R}^\lambda_{\cdot i}=0. \quad (-21.2)$$

在两个成对偶对应的接續中，

$$閉路\begin{Bmatrix}电\quad 流\\电动势\end{Bmatrix}\longleftrightarrow 节点\begin{Bmatrix}电\quad 位\\电流源\end{Bmatrix},$$

$$\begin{matrix}阻抗\\导納\end{matrix}\Bigg\}\longleftrightarrow\Bigg\{\begin{matrix}导納,\\阻抗,\end{matrix}$$

如果再令这些相互对应的量的数值相等，那末一切电工学上的特性都成对偶的对应。

§ 8 的結构力学中的 Cremona 变换是和这类似的一个例子，平面桁架和 Cremona 应力平面满足 Euler 多面体条件是显然的。

## § 22 网絡的分裂法

从 Cremona 变换的可能性来看也知道不单純的桁架特别是不靜定結构的应力分析是件累贅事，因此大家往往設法把它分割成容易分析的若干部分，把各个断面逐一分析以后再合在一起。

不靜定剩余度是这种分割的数目的依据。这是历来結构力学家們的得意方法❶，不过最近 G. Kron 提出了一种可称为上述方法的一般化和系統化的方法論，叫"分裂法 (diakoptics)"❷。用他的話来說，这是把"天大的問題切成細片，个别解决，然后归并起来"，求得网絡或場的复杂問題的实用解答。

从希腊語源来看，dia 是"来回"或"对立"的意思，kopt 是"分割"的意思。这方法含有一些不一定能保持拓扑性质的运算在內。从实用的观点来看，这种方法和下一节的对偶的分裂法提供了实用的方法，把那些从正面看来很难的問題在等价网絡上加以簡捷解决，因此是宝貴的。在网絡特别是电网絡和枝結构物的范圍中，用这方法还可以求出精密解。但是对于場，由于网絡只是場的近似表現，用这方法只能求出近似解。因此这里主要用电网絡說明。

首先，Kron 的方法概括起来可以分成下面几个阶段。

（i） 把所假設的网絡分成几个**部分网絡**。

（ii） 对各个部分网絡分头造**等价部分网絡**。这相当于所謂各个独立解决的步驟。

（iii） 把等价部分网絡拼成原来的等价网絡。

（iv） 通过等价网絡的分析求原网絡的解。

这里介紹一个把它进一步簡化的方法的要点。例如图+22.1是給定的网絡，現在利用使节点电位 $V_b$ 不变的等价网絡来求解[29],[30]。下面的具体步驟当然不是唯一的。

（i） 把图 +22.1 的枝 *22*, *23*, *24*, *25* 切断并除外得到图

---

❶ 过去 Hardy Cross[22], R. V. Southwell[23],[24] 所热烈研究的松弛法 (relaxation method) 等也可以說是这种思想的一种发展，不仅对結构物，即使对工程物理学的許多方面也都可以应用。

❷ Kron 的論文很多，例如 [25], [26] 等等，其他參看 [27], [28]。

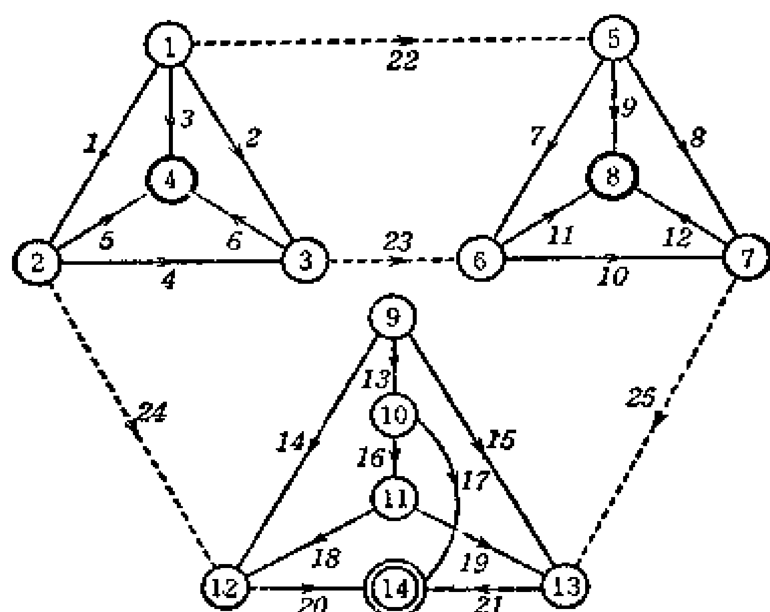



图 +22.1

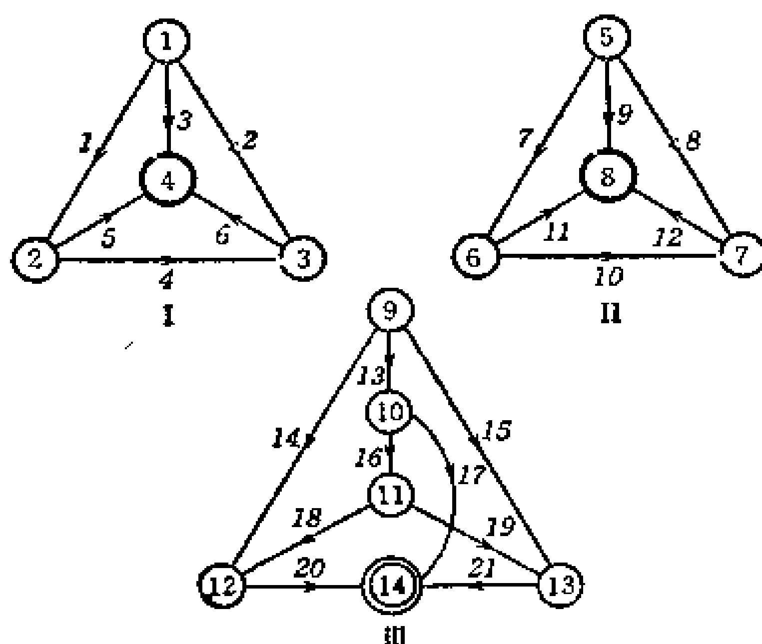



图 +22.2

+22.2 的 I, II, III 那样的部分网絡。这种除掉的运算通常称为**开路**。*22*, *23*, *24*, *25* 叫做**联絡枝**。属于 I, II, III 的点各是 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12, 13, 14, 联絡枝是属于各部分网絡节点的反边界的和集:

$$\delta(1\cup 2\cup 3\cup 4)\cup\delta(5\cup 6\cup 7\cup 8)\cup\delta(9\cup 10\cup 11\cup 12\cup 13\cup 14)$$
$$=(22\cup 23\cup 24)\cup(22\cup 23\cup 25)\cup(24\cup 25)$$
$$=22\cup 23\cup 24\cup 25, \qquad (+22.1)$$

但是分成部分网絡以后彼此之間就沒有相互結合了。

也可以把全部节点都分离开来，然后用下面 (ii) 的办法做一个包含全部节点的星形，不过这样就跟直接拿原网絡来进行計算沒有多大差别了。因为求解时逆方陣的計算要在跟原来同样高的次数下进行。因此 (i), (ii) 的办法相当于适当地使用接續的形状把問題分成低次的来求解。

(ii) 按照图 +22.2 作起图 +22.3 那样的星形即**端子型等价部分网絡**[1]。其中的枝叫**端子枝**，用 $\varkappa'$, $\lambda'$, … 即图內那样地用 $1'$, $2'$, …命名，且帶有方向。現在取 $\alpha$=I, II, III, 并設端子枝的导納 $y^{\varkappa_\alpha\lambda_\alpha}$ 等于部分网絡的节点导納 $y^{a_\alpha b_\alpha}$。也就是等于

$$y^{a_\alpha b_\alpha}=D^{a_\alpha}_{\cdot\varkappa_\alpha}y^{\varkappa_\alpha\lambda_\alpha}D^{\cdot b_\alpha}_{\lambda_\alpha} \qquad (+22.2)$$

(参考(+20.6))。如果图 +22.1 各枝的导納是 1，那末

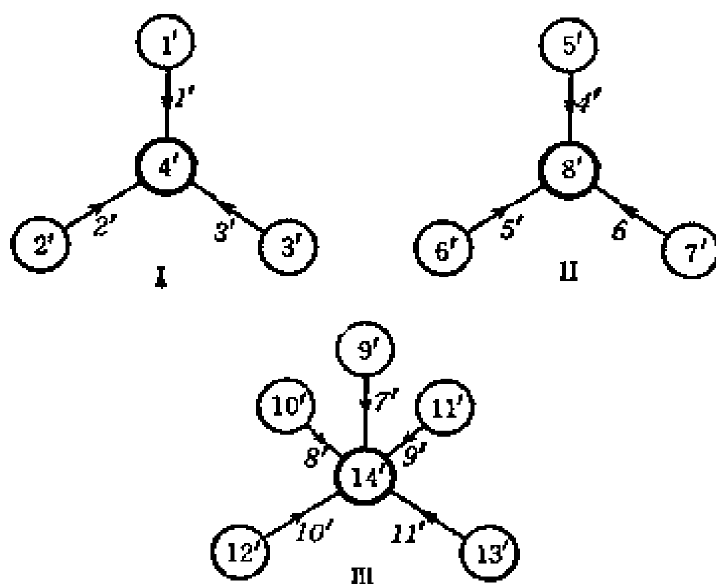



图 +22.3

[1] 不一定非照图 +22.3 那样置换不可，把图 +22.2 的适当的枝切断，把这枝对这枝上的点的影响分攤到别的枝上去，然后进行类似于下面的操作也行。

$$y^{a_1 b_1}=\begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 3 & \cdot & -1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 \end{array}\quad \begin{array}{|cccccc|} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}$$

$$\cdot\begin{array}{|ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & -1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & -1 & 2 \\ 1 & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & -1 & 4 \\ \cdot & 1 & \cdot & 5 \\ \cdot & \cdot & 1 & 6 \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{array}. \qquad (+22.3)$$

(行标 $a_1$，列标 $\varkappa_1$；左矩阵列标 $b_1$，行标 $\lambda_1$；右矩阵行标 $a_1$，列标 $b_1$。)

因此就叫

$$y^{\varkappa'_1\lambda'_1}=\begin{array}{c|ccc|} & 1' & 2' & 3' \\ \hline 1' & 3 & -1 & -1 \\ 2' & -1 & 3 & -1 \\ 3' & -1 & -1 & 3 \end{array}. \qquad (+22.4)$$

(iii) 把图 +22.3 的各端子型等价部分网絡用联絡枝联接起来构成和原来网絡等价的网絡，于是得到图 +22.4 那样的**端子型**(等价)网絡。

以上 (i)～(iii) 的操作就是"把所設的网絡分成联絡的枝集和它們的补复形，把这样所产生的多树变形作为星形的集合，再用联絡枝把它們联接起来"。

(iv) 这个端子型等价网絡的电源是把原来网絡的节点电流源 $s^a$❶ 和枝电动势 $e_\lambda$❷ 都包括在内的节点电流源 $s^{a'}$，即采用

$$s^{a'}=s^a-D^a_{\cdot\kappa}y^{\kappa\lambda}e_\lambda. \qquad (参考(+20.7))$$

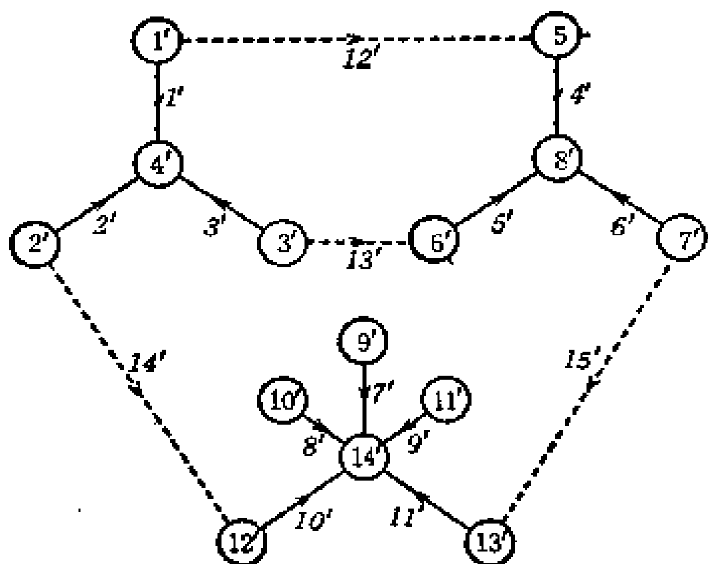



图　+22.4

这个网絡的分析，以取閉路电流 $J^{p'}$ 当未知数为便，因为閉路比原来的减少了。$J^{p'}$ 一决定，馬上就能决定节点电位 $W_b$。这节点电位和原来网絡的节点电位 $V_b$ 一致。$V_b$ 一决定，别的量的决定就不在話下了。

## §23　对偶的分裂法

有时候，Kron 方法的对偶处理会更有效一点[29],[30]。在 §22 内不变对象是节点，但在这里采用独立閉路做不变对象。因此等价变換时不妨方便地变动枝的分歧点。

例如图 −23.1 是給定的网絡，我們說明在这情况下怎样利用保持閉路特性的等价网絡，然后求解。

---

❶ 如果枝电流源 $s^\kappa$ 已知，那末 $s^a=D^a_{\cdot\kappa}s^\kappa$.

❷ 如果已知閉路电动势 $e_q$，那末 $e_\lambda$ 是 $e_q=B_q^{\cdot\lambda}e_\lambda$ 的任意解。和上一个脚注的情况一样，都可以从图形上推算出来。

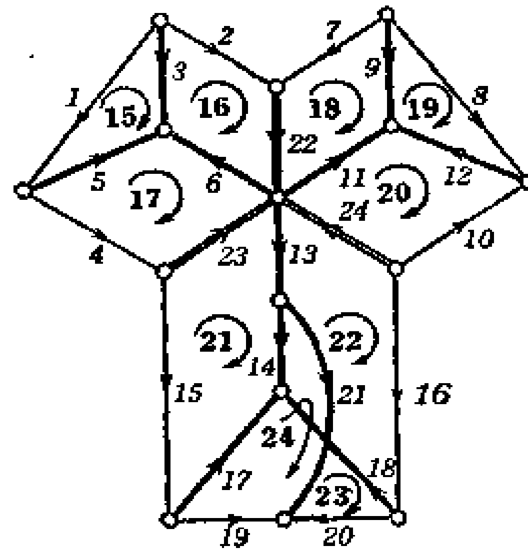



图 －23.1

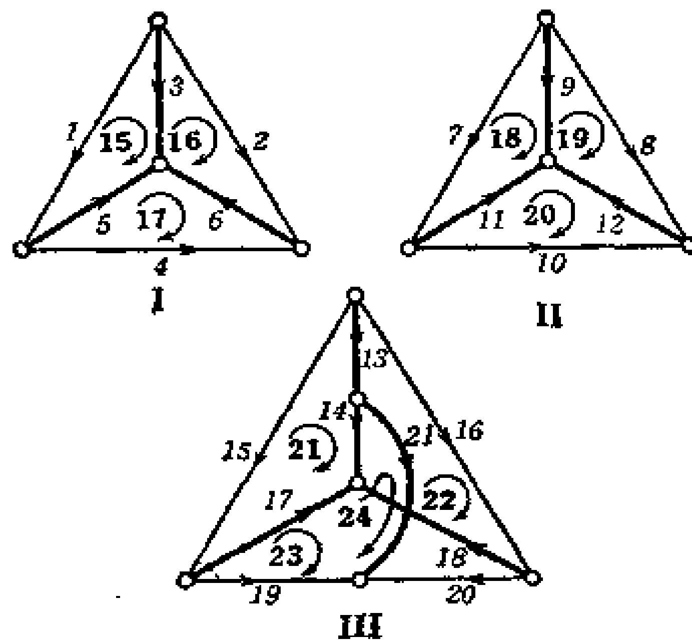



图 －23.2

（i）把图 －23.1 的枝 *22*, *23*, *24* 纵割以后可得图 －23.2 **I**, **II**, **III** 那样的部分网络。纵割掉的枝在考察中略去了❶，所以这种纵割的操作和短路的操作相等。可以纵割（短路）的枝（*22*, *23*, *24*）叫**反联絡枝**。属于 **I**, **II**, **III** 的閉路各表示做 **15**, **16**, **17**; **18**, **19**, **20**; **21**, **22**, **23**, **24**. 反联絡枝集合是属于不同部分

❶ 在（iii）中再考虑。

网絡的閉路的共同边界上的枝的和集❶，即

$$\{(\partial 15\cup\partial 16\cup\partial 17)\cap(\partial 18\cup\partial 19\cup\partial 20)\}\cup$$
$$\cup\{(\partial 18\cup\partial 19\cup\partial 20)\cap(\partial 21\cup\partial 22\cup\partial 23\cup\partial 24)\}\cup$$
$$\cup\{(\partial 21\cup\partial 22\cup\partial 23\cup\partial 24)\cap(\partial 15\cup\partial 16\cup\partial 17)\}$$
$$=22\cup 23\cup 24❷. \qquad (-23.1)$$

一般，要把(−23.1)变形成(+22.1)的同样形式是不可能的，可是在下述情况下，也只有在下述情况下，这是可能的，就是当我們把平面接續中所采用的独立閉路都看成面时原来的网絡变成 Euler 多面体的情况。另一方面，虽然（+22.1）总可以变成(−23.1)的形式，但是不方便。

如果把枝 *3*, *5*, *6*, *9*, *11*, *12*, *13*, *14*, *17*, *18*, *21*, *22*, *23*, *24* 都加以纵割，那末所有閉路都給反分割了，不过在这情况下要把这些等价网絡組合起来，那就和在原来网絡上分析差不多費力。这个方法在計算上的便利在于化成低次的逆方陣的計算。因此要注意(i)和下面的阶段(ii)的差异。

（ii）对偶变换操作的第二阶段是求图 −23.2 的各个部分网絡的对偶等价网絡。是从图+22.2 变到图+22.3 的操作的对偶。

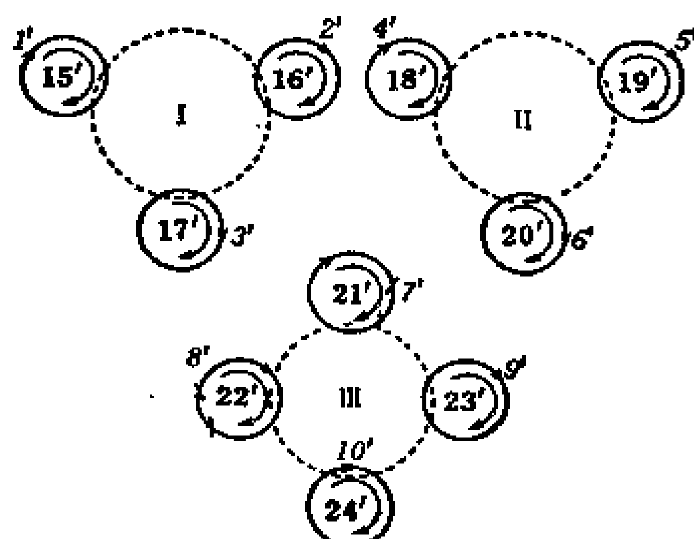



图　−23.3

---

❶ 因此在图 −23.1 中用重复綫条表示。

❷ 也可以略去 ∂.

对应于图 −23.2 的独立閉路，我們做图 −23.3 那样的**閉路型等价部分网絡**❶。各个网絡只由一个枝构成，称为**閉路枝**❷。

因为閉路枝的阻抗 $z_{\lambda_\beta' \varkappa_\beta}$ 假設是和原来的部分网絡的閉路阻抗

$$z_{q_\beta p_\beta} = R_{q_\beta}^{\cdot\lambda_\beta} z_{\lambda_\beta \varkappa_\beta} R^{\varkappa_\beta}_{\cdot p_\beta} \qquad (-23.2)$$

相等的，所以如果在图 −23.1 的例子中假定原来网絡中各枝的自阻抗是 1Ω，那末

$$z_{q_I p_I} = \begin{array}{c|cccccc|} {}_{q_I \downarrow}\diagdown^{\lambda_I \to} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 15 & -1 & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ 16 & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 17 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|cccccc|} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}$$

$$\cdot \begin{array}{|ccc|c} 15 & 16 & 17 & {}^{\leftarrow \varkappa_I}\diagup_{p_I \downarrow} \\ \hline -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 2 \\ 1 & -1 & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & -1 & 4 \\ -1 & \cdot & 1 & 5 \\ \cdot & 1 & -1 & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} {}_{q_I \downarrow}\diagdown^{p_I \to} & 15 & 16 & 17 \\ \hline 15 & 3 & -1 & -1 \\ 16 & -1 & 3 & -1 \\ 17 & -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array}. \qquad (-23.3)$$

因此可以設

---

❶ 如果不做这样的閉路集，那末把各部分网絡中适当的枝纵割而把它的影响分攤給别的枝也行。閉路枝集是把部分网絡中的树的枝纵割了以后得到的。

❷ 各部分閉路用虚綫閉曲綫纏在一起的意思跟图 −20.1 一样，此外现在合为一个閉路考虑，所以早就不是独立的了。

$z_{\lambda'_{\mathrm{I}}\varkappa'_{\mathrm{I}}} = \lambda'_{\mathrm{I}} \downarrow$ ; $\varkappa'_{\mathrm{I}} \to$

| | 1′ | 2′ | 3′ |
|---|---|---|---|
| 1′ | 3 | −1 | −1 |
| 2′ | −1 | 3 | −1 |
| 3′ | −1 | −1 | 3 |

(−23.4)

对于 **II** 和 **III** 也同样。

(iii) 把图 −23.3 的 **I**, **II**, **III** 用第一阶段 (i) 的反联絡枝反联接起来以实現原来网絡的等价网絡，于是得到图 −23.4 那样的**閉路型等价网絡**。

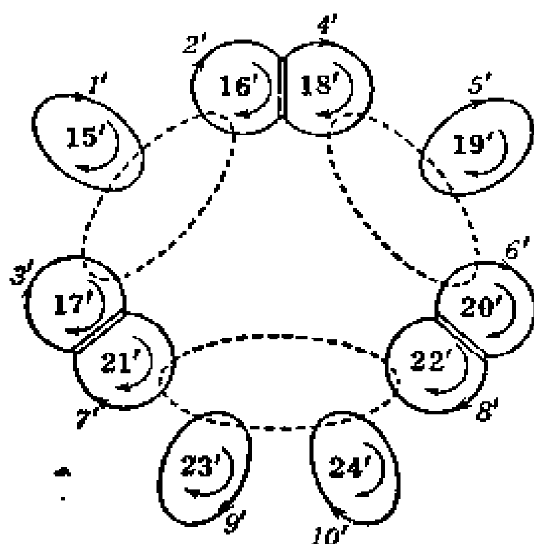


图 −23.4

以上 (i) ~ (iii) 的操作就是"把所設的网絡割断做反联絡枝集和它的补部分复形，把所出現的多反树变形作閉路枝集合，然后用反联絡枝联接起来"。

(iv) 这个閉路型等价网絡的电源采用的是把原来网絡的閉路电压源（閉路电动势）$e_q$ 和枝电流源 $s^{\varkappa}$❶ 都包括在内的閉路电压源

$$e_{q'} = e_q - R_q^{\cdot\lambda} z_{\lambda\varkappa} s^{\varkappa}. \qquad (\text{参考}(-20.7))$$

这里也不妨把各部分网絡变形使它們共有一点，所以可以指望减少节点的数目，然后采用节点电压 $V_{b'}$ 做未知数。求出 $V_{b'}$❷，再求出閉路电流 $J^{p'}$，这个 $J^{p'}$ 就是原来网絡的 $J^p$. 原来网絡的 $J^p$ 旣然决定，别的量的决定就不在話下了。

---

❶ 如已知的是枝电压源 $e_\lambda$, $e_q = R_q^{\cdot\lambda} e_\lambda$. 如已知的是节点电流源 $s^a$, $s^{\varkappa}$ 就是 $s^a = D^a_{\cdot\varkappa} s^{\varkappa}$ 的任意解。两者都可以通过計算求得，不过从接續也可以直接推想出来。

❷ 在等价网絡上的分析也可以依靠实驗方法，不过因为这时候网絡实現过程中出現新問題，所以沒有談到。

两种分裂法，一种是“使部分网絡的节点反边界变成开路❶”，另一种是“使部分网絡的网孔(面)的边界变成短路❷”，在这意义下，它們完全是对偶的，它們的得失完全决定于网絡的形式，联絡枝和反联絡枝取法的难易，还有能否求得同构的部分网絡等等。

## §24 場的分裂法

一般，在对2維或3維的連續的物理場問題作近似研究时分裂法也有用处。例如，把图 +24.1 那样的矩形場分成許多小矩形 $A, B, C, \cdots$ 等等，依各小区域的性质在一般的边界条件下求解。使这些解沿分界綫适合連續性或其他条件，适当地归并起来就可以求得整个場的解。下面的要求是理所当然的：

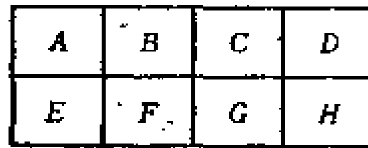



图 +24.1

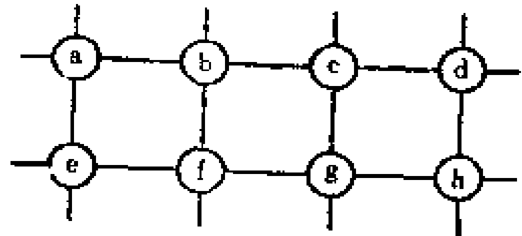



图 −24.1

(i) 通过适当的分割，使近似計算的手續最少。

(ii) 小片的性质稍有变动时，只要更动这小片上的解，对别部分可以計算它的二次的影响然后补正。因此預先把各种各样的解記下来是有用的。

(iii) 便于利用等价的电网絡。

要把考察的对象領域分成小領域后再归并，对于图 +24.1 那样的2維的場来說，用图 −24.1 那样的反接續是有效的，对于3維的場，也可以在各小領域里取适当的（大体上是任意的）点当做核心，然后把这些小領域間的分界面用联接两个核心的枝代表，于

❶ 切断，横割。
❷ 纵割。

是得到1維几何复形(网絡)[31]。(这个网絡相当于原来的3維接續的反接續。)若将这个接續上的适当的物理量和原来的一些物理量等同起来,那就完全成了网絡的分裂法問題。

例如用这方法来分析电(磁)場时,把电(磁)通适当地积分,当作附属于各枝的量,那末关于这些量的 Gauss 定理就成为1-Kh定律。如果把各个电磁場发散体的联絡統統割断,各个发散体暂时分别处理,那就是分裂法。另一方面,如果考虑把各枝上的电(磁)場强度綫积分以后所得到的量,那末 Stokes 定理成为2-Kh定律。先不考虑若干个电磁場环路間的联絡,这样的处理办法就是反分裂法。电(磁)通和电(磁)場間的因果律近似地表现为 Ohm 定律的形式。

当場的量和它們的因果关系比較复杂时,可以考虑各种各样适当的对策,引入模拟概念,轉到等价网絡,于是也可以采取这种办法。要之,这实际上是以分割为基础的近似解法的某种組織化,在目前情况下,能发揮效用的还只限于綫性問題或者特殊的非綫性問題。

# 附　录

## 1　指标記法

向来行列式用| |表示,矩陣用▭或者[ ]表示,这些記号在数值計算上虽然便利,但是在叙述一般理論时有許多不便。叙述一般理論时一个行列式或一个矩陣也有单用一个字母代表的那样一种直記法，不过各种各样元素的內容和相互关系等等不能明显表示出来,因此往往忙于追查开头的假設。指标記法补救了这些缺点,与| |,▭并用是非常有效的。矩陣用它的附有指标的元素的一般项代表,行列式可以用**变换**記号[ ]来表示。又指标記法的主要特征是**上下指标**的分别使用，有一对上下指标相同的那种项表示指标取一切可能数值时所得到的所有的项的和。例如$\kappa$若从$1$变到$6$,那末

$$D^{i}_{\cdot\kappa}i^{\kappa}=D^{i}_{\cdot 1}i^{1}+D^{i}_{\cdot 2}i^{2}+\cdots+D^{i}_{\cdot 6}i^{6}.$$

在相对論出現以前都写成

$$\sum_{\kappa=1}^{6} D^{i}_{\cdot\kappa}i^{\kappa}.$$

因为經常出現同一的一对上下指标的所有各项之和，所以規定把总和記号 $\Sigma$ 省掉,这种办法往往称做 **Einstein 簡便法**。在这簡便法下,上面那个式子就相当于矩陣乘积(假定 $i=1, 2, 3, 4$)

$$\begin{bmatrix} D^{1}_{\cdot 1} & D^{1}_{\cdot 2} & D^{1}_{\cdot 3} & D^{1}_{\cdot 4} & D^{1}_{\cdot 5} & D^{1}_{\cdot 6} \\ D^{2}_{\cdot 1} & D^{2}_{\cdot 2} & D^{2}_{\cdot 3} & D^{2}_{\cdot 4} & D^{2}_{\cdot 5} & D^{2}_{\cdot 6} \\ D^{3}_{\cdot 1} & D^{2}_{\cdot 2} & D^{2}_{\cdot 3} & D^{3}_{\cdot 4} & D^{2}_{\cdot 5} & D^{3}_{\cdot 6} \\ D^{4}_{\cdot 1} & D^{4}_{\cdot 2} & D^{4}_{\cdot 3} & D^{4}_{\cdot 4} & D^{4}_{\cdot 5} & D^{4}_{\cdot 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^{1} \\ i^{2} \\ i^{3} \\ i^{4} \\ i^{5} \\ i^{6} \end{bmatrix}$$

在指标記法下的表示法。上面例子中規定每个前指标表示**行**的号碼，后指标表示**列**的号碼。象上面例子中 1，2，… 那样的特定指

标叫**定标**，$i$ 那样的任意指标叫**自由标**，适用简便法的自由标叫**和标**。象 $i$, $D$ 那样当做主体的字母叫**主字**(核字母)，**单位矩陣**用 $A$ 做主字，写成 $A^{\kappa}_{\lambda}$, $A^{i}_{j}$ 这种样子。

为了使指标記号更有效，行列式用交换[ ]表示。規定[ ]的意义如下：[ ]中的指标經过偶置换以后带＋号，經过奇置换以后带－号，把經过所有的置换所得的項加起来，再用項数除。照这規定，可以这样写：

$$\begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \\ P^3_{\cdot 1} & P^3_{\cdot 2} & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 3!\ P^{[1}_{\cdot 1}\ P^2_{\cdot 2}\ P^{3]}_{\cdot 3} \\ &= 3!\ P^1_{\cdot [1}\ P^2_{\cdot 2}\ P^3_{\cdot 3]} \\ &= 3!\ P^{[1}_{\cdot [1}\ P^2_{\cdot 2}\ P^{3]}_{\cdot 3]}. \end{aligned}$$

交换中重复出現交换时数值不变。因此添上 3!。

根据这記号，**Cramer 法則**当作 $P^i_{\cdot j}x^j=y^i$ ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$) 的解来看，可以表成

$$x^j=\frac{3!3A^j_{[1}A^{[1}_{|i|}P^2_{\cdot 2}P^{3]}_{\cdot 3]}}{3!P^{[1}_{\cdot [1}P^2_{\cdot 2}P^{3]}_{\cdot 3]}}\,y^i.$$

插进| |表示这里面的指标要从[ ]中除外。这式子用通常的矩陣表示法写起来是

$$\begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \\ P^3_{\cdot 1} & P^3_{\cdot 2} & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \\ \cdot & P^3_{\cdot 2} & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & P^3_{\cdot 2} & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cdot & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ \cdot & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \\ 1 & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ P^2_{\cdot 1} & \cdot & P^2_{\cdot 3} \\ P^3_{\cdot 1} & \cdot & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & \cdot & P^1_{\cdot 3} \\ \cdot & 1 & \cdot \\ P^3_{\cdot 1} & \cdot & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & \cdot & P^1_{\cdot 3} \\ P^2_{\cdot 1} & \cdot & P^2_{\cdot 3} \\ \cdot & 1 & \cdot \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & \cdot \\ P^3_{\cdot 1} & P^3_{\cdot 2} & \cdot \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ P^3_{\cdot 1} & P^3_{\cdot 2} & \cdot \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & \cdot \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \\ P^3_{\cdot 1} & P^3_{\cdot 2} & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y^1 & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ y^2 & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \\ y^3 & P^3_{\cdot 2} & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & y^1 & P^1_{\cdot 3} \\ P^2_{\cdot 1} & y^2 & P^2_{\cdot 3} \\ P^3_{\cdot 1} & y^3 & P^3_{\cdot 3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & y^1 \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & y^2 \\ P^3_{\cdot 1} & P^3_{\cdot 2} & y^3 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

又 **Laplace 展开是**

$$4!P^1_{\cdot[1}P^2_{\cdot 2}P^3_{\cdot 3}P^4_{\cdot 4]}=4!P^{[1}_{\cdot[1}P^{2]}_{\cdot 2}P^{[3}_{\cdot 3}P^{4]}_{\cdot 4]},$$

**Binet-Cauchy 展开**是

$$|P^a_{\cdot\varkappa}y^{\varkappa\lambda}Q^{\cdot b}_{\lambda}|$$

$$=\left|\begin{vmatrix} P^1_{\cdot 1} & P^1_{\cdot 2} & P^1_{\cdot 3} \\ P^2_{\cdot 1} & P^2_{\cdot 2} & P^2_{\cdot 3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y^{11} & y^{12} & y^{13} \\ y^{21} & y^{22} & y^{23} \\ y^{31} & y^{32} & y^{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q^{\cdot 1}_1 & Q^{\cdot 2}_1 \\ Q^{\cdot 1}_2 & Q^{\cdot 2}_2 \\ Q^{\cdot 1}_3 & Q^{\cdot 2}_3 \end{vmatrix}\right|$$

$$=3!\,(P^{[1}_{\cdot\varkappa_1}y^{\varkappa_1\lambda_1}Q^{\cdot[1}_{\lambda_1})\,(P^2_{\cdot\varkappa_2}y^{\varkappa_2\lambda_2}Q^{\cdot 2}_{\lambda_2})\,(P^{3]}_{\cdot\varkappa_3}y^{\varkappa_3\lambda_3}Q^{\cdot 3]}_{\lambda_3})$$

$$=3!\,P^{[1}_{\cdot\varkappa_1}P^2_{\cdot\varkappa_2}P^{3]}_{\cdot\varkappa_3}y^{\varkappa_1\lambda_1}y^{\varkappa_2\lambda_2}y^{\varkappa_3\lambda_3}Q^{\cdot[1}_{\lambda_1}Q^{\cdot 2}_{\lambda_2}Q^{\cdot 3]}_{\lambda_3}.$$

【 】是在单用[ ]会产生混淆的时候采用的。

## 2 根据 $k(=\alpha^2-R^2)$ 和 $m(=\alpha^0-R^0)$ 数値的接續的分类❶

一切网络可以根据它所包含的独立閉路的数目 $k$ 和独立节点的数目 $m$ 来分类。

附图 1 是**独立閉路数目 $k$** 等于 1～5的一切可能的接續和 $k=6$

附图 2 是**独立节点数目 $m$** 等于 1～5 的一切可能的接續。但

❶ 根据 R. M. Foster[32]。

附图 1

$a^2-R^2=1$;

$a^2-R^2=2$;

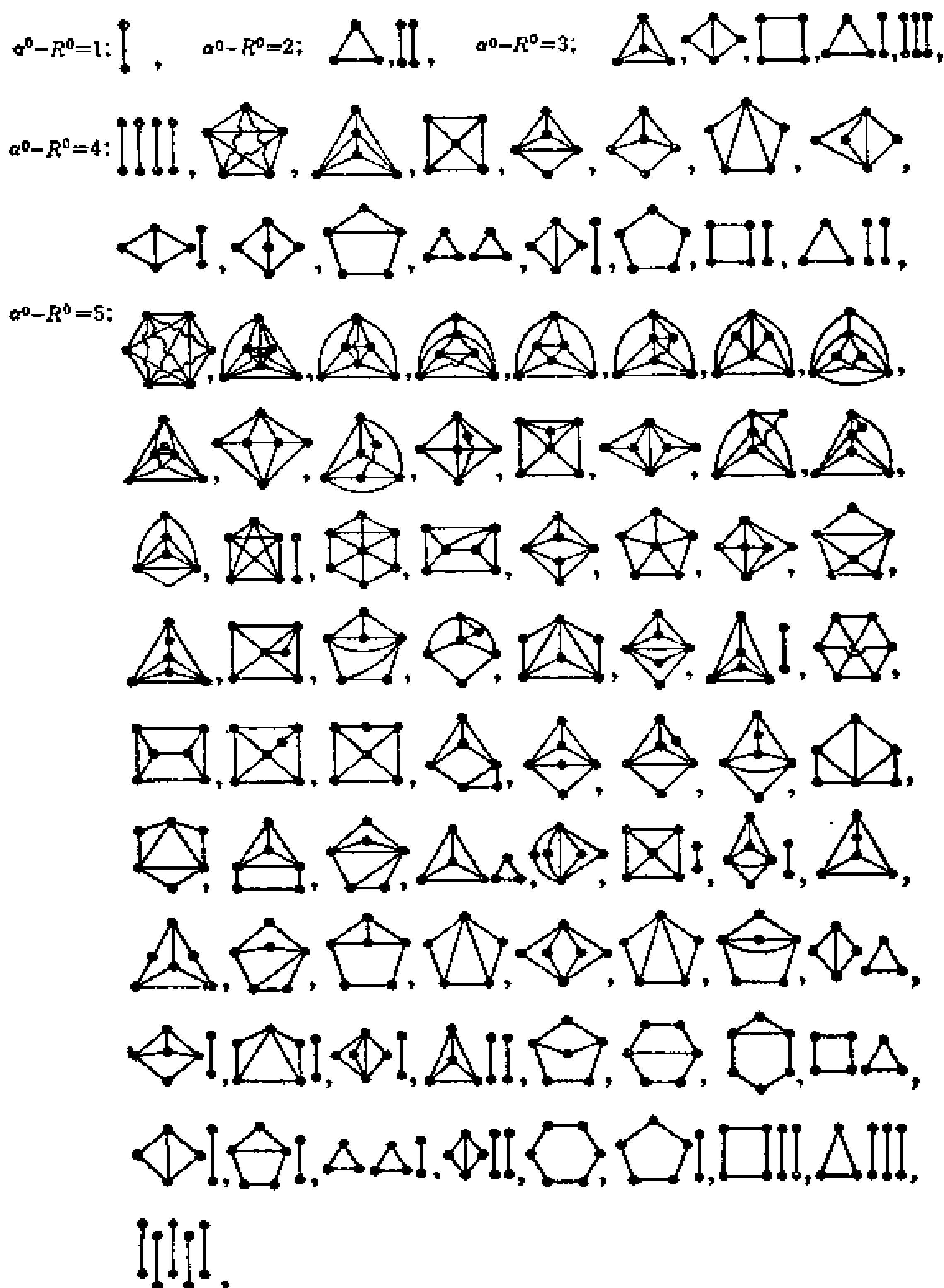
$a^2-R^2=3$;

$a^2-R^2=4$;

$a^2-R^2=5$;

$a^2-R^2=6$;

附图 2



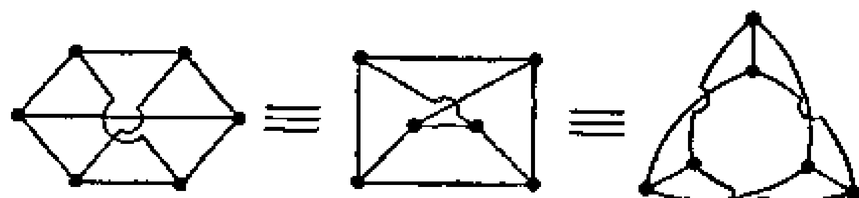
的基本接續❶。但是开枝(不属于任何閉路的枝)不管,串联的枝当作单一的枝看待。

是，单独成为一个孤立閉路的那种单一的枝不管了，并联的枝当作单一的枝看待。

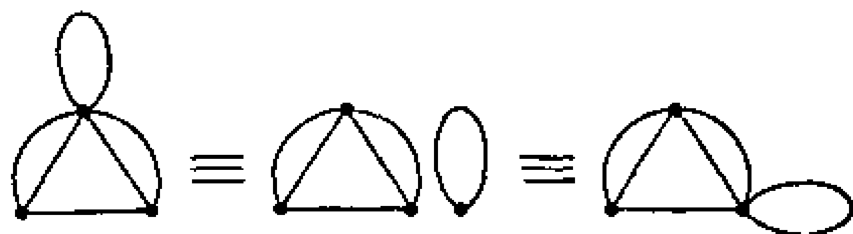
又凡是可以通过下面的操作互相轉变的网絡都看作是相同的。

$k$ 固定：

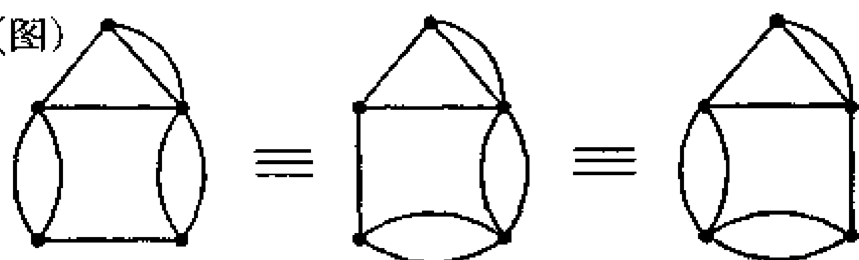
i) 变形(图)



ii) 分离(图)



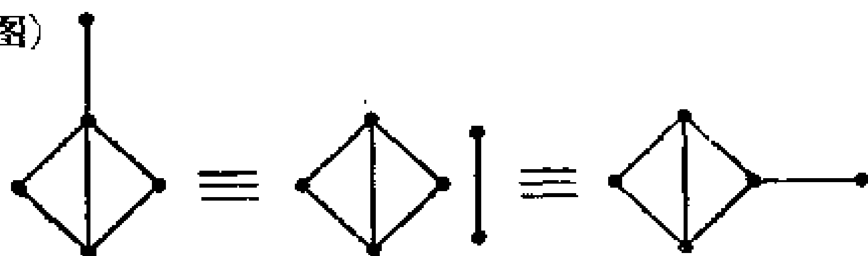
iii) 串联替换(图)



$m$ 固定：

i) 变形　同左($k$ 固定的情况)。

ii) 分离(图)



iii) 并联替换　包含在变形的情况中。

---

❶ $k=6$ 的一切接續可以从短路这些接續的任何一个枝得到。与此对偶的"$m$—固定"的基本接續(用任意开路它的一个枝的办法可以得到所有的接續)有 $m+1$ 节点,任何两点都有一个枝直接联接,所以不再画出来了。

# 参考文献

## 序

[1] O. Veblen: Analysis Situs, 2nd ed. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 5, Part 2 (New York, 1931).

[2] J. C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism, I, II. 3rd ed. (Oxford Clarendon Press, 1904).

## 第 1 章

[3] 河田敬义,竹内外史:位相几何学(数学全书)(朝仓书店, 1952).

[4] S. Lefschetz: Algebraic Topology. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 27 (New York, 1942).

[5] P. Alexandroff, H. Hopf: Topologie I (Julius Springer, Berlin, 1935).

[6] S. Okada, R. Onodera: A Unified Treatise on the Topology of Networks and Algebraic Electromagnetism. Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, I (1955), 68~112.

## 第 2 章

[7] L. Pontrjagin: Topological Groups. Princeton Mathematical Saries, No. 2 (Princeton University Press, 1939).

[8] M. Iri: Network Theory based upon Topology. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 10 (1956).

[9] 岡田幸雄,岩下光男,富士岳: 位相几何と回路网(1)~(10),电气通信学会志 42 (1941).

[10] L. Cremona: Le Figure Reciproche nella Statica Grafica. Opere Matematiche di Luigi Cremona, Tomo Terzo (Milano, 1917), 336~366.

[11] 稲田武雄: 构造力学(应用数学 XII)(河出书房, 1942).

## 第 3 章

[12] W. Cauer: Topologische Dualitätssätze und Reziprozitätstheoreme der Schaltungstheorie. Z. A. M. M., 14, 6 (1934), 349~350.

[13] W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, I (Leipzig, 1941).

[14] K. Kondo, M. Iri: On the Theory of Trees and Cotrees. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 17 (1956).

[15] I. Cederbaum: Invariance and Mutual Relations of Electrical Network Determinants. Journal of Mathematics and Physics. 24, 4 (1956), 236 ~244.

[16] M. Iri: On the Fundamental Theorems used in the Analysis of Trees and Cotrees. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 26 (1957).

[17] R. Otter: The Number of Trees. Annals of Mathematics, 49, 3 (1948), 583~599.

[18] M. Iri, R. Onodera, K. Kondo: A Theory of Multi-Trees and Multi-Cotrees and its Application to the Analysis of 2-Trees and 2-Cotrees. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 30 (1957).

## 第 4 章

[19] 岡田幸雄：回路网序論。电气通信学会志 27, 12 (1943), 9~22.

[20] Y. Miyazaki: Direct and Intuitive Analysis of Electric Networks. Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, I (1955), 113~171.

[21] W. S. Percival: The Solution of Passive Electrical Networks by means of Mathematical Trees. Proceedings of the I. E. E., 100, III, 65 (1953), 143~150.

## 第 5 章

[22] Hardy Cross: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, Transactions of A. S. C. E., 96 (1932), 1~10.

[23] R. V. Southwell: Relaxation Methods in Engineering Science (Oxford Clarendon Press, 1940).

[24] R. V. Southwell: Relaxation Methods in Theoretical Physics. (Oxford Clarendon Press, 1946).

[25] G. Kron: A Set of Principles to Interconnect the Solutions of Physical Systems. Journal of Applied Physics, 24, 8 (1953), 965~980.

[26] G. Kron: A Method to Solve Very Large Physical Systems in Easy Stages. Proceedings of the I. R. E., 42, 4 (1954), 680~686.

[27] J. P. Roth: The Validity of Kron's Method of Tearing. Proceedings of

Nat. Acad. Sci., 41, 8 (1955), 599～600.

[28] R. E. Wengert: Simple Diakoptics. Matrix and Tensor Quarterly, 5, 4 (1955), 129～135.

[29] R. Onodera: Dual Diakoptics. R. A. A. G. Research Note, 2nd Ser., 11 (1956).

[30] R. Onodera, N. Ishiyama: Diakoptics and Codiakoptics. Bulletin of Yamagata University, 4, 2 (1957), 235～258.

[31] S. Okada, R. Onodera: Algebraification of Field Laws of Physics by Poincaré Process. Bulletin of Yamagata University. Natural Science, 1, 4 (1951), 397～404.

## 附　录

[32] R. M. Foster: Geometrical Circuits of Electrical Networks. Transactions of A. I. E. E., 51, 2 (1932), 309～317.

最近两三年来，R. A. A. G. Research Notes, 2nd Series, Nos. 5, 6, 7, 10, 11, 14, 17, 22, 25, 26, 27, 30, 31 中提出的許多内容也收罗在本书内，有些只介紹結果，詳細报告都預定要发表在一两年内刊行的

Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by means of Geometry, Vol. II.

此外討論一般有关問題的参考书有

[33] K. Reidemeister: Knotentheorie (Julius Springer, Berlin, 1932).

[34] W. Blaschke, G. Bol: Geometrie der Gewebe (Julius Springer, Berlin, 1938).